



# Utilités Progressives Dynamiques.

Mohamed Mrad

## ► To cite this version:

Mohamed Mrad. Utilités Progressives Dynamiques.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2009. Français. NNT: . pastel-00005815

**HAL Id: pastel-00005815**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00005815>**

Submitted on 21 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilités progressives dynamiques

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 Octobre 2009

pour l'obtention du

**Doctorat de l'École Polytechnique**

(spécialité mathématiques appliquées)

par

Mohamed M'RAD  
sous la direction de Nicole El Karoui

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Huyên Pham
<i>Rapporteurs :</i>	Bruno Bouchard Monique Jeanblanc
<i>Examineurs :</i>	Nicole El Karoui Nizar Touzi Emanuel Gobet Anis Matoussi

Mis en page avec la classe thloria.





## Remerciements

Mes premiers et chaleureux remerciements vont à "La boss des maths" Nicole El Karoui , ma directrice de thèse, pour son soutien constant et son excellente direction à la fois avisée et exigeante à laquelle cette thèse doit beaucoup. Je lui suis vraiment reconnaissant pour le soutien, la confiance et l'autonomie qu'elle m'a accordés pendant toutes ces années.

Je tiens également à lui exprimer toute ma gratitude et mon profond respect pour sa rigueur scientifique, son dynamisme et ses précieux conseils dont j'ai tiré un grand profit.

Mes remerciements les plus respectueux vont également à Bruno Bouchard et Monique Jeanblanc qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir rapporter la thèse en y prêtant toute l'attention nécessaire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je présente mes sincères remerciements à Huyên Pham qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Emmanuel Gobet et Anis Matoussi qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Nizar touzi pour son écoute, ses questions et pour l'honneur qui m'a fait en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

Un grand merci à Christine Fricker membre du projet RAP à l'INRIA, d'avoir lu soigneusement la thèse et m'avoir signaler les fautes.

Je pense également aux futurs anciens , mes amis thésards et post-docs, avec qui j'ai passé des moments agréables et très sympathiques pendant les déjeuners, les pauses café ou encore les matchs de foot.

Je voudrais aussi remercier Sylvain Ferrand, notre administrateur système, pour sa compétence, sa disponibilité et son assistance en informatique.

Je voudrais adresser un remerciement particulier à tous les membres de l'équipe "Mathématiques Financières" pour l'ambiance chaleureuse de travail qu'ils maintiennent au quotidien.

Merci à toutes nos chers secrétaires et en particulier Nasséra, Sébastien, Sandra, Wallis, Nathalie pour leur gentillesse, leur bonne humeur et les nombreux services qu'ils ont rendus toujours avec le sourire.

Un grand merci à tous les membres du CMAP. Je garde toujours le meilleur souvenir de tous les membres du laboratoire que j'ai côtoyés pendant ces années de thèse.

Merci à Fabrice Baronnet, Claudette Dessertaine et Audrey Lemaréchal, membres de l'école doctorale à polytechnique de m'avoir conseillé et accompagné dans toutes mes démarches administratives dès le début de la thèse.

En ce moment où je passe par une étape majeure dans mon parcours universitaire, mes pensées vont vers mes chers et adorables parents : Fethi et Dalila qui n'ont ménagé aucun effort pour me soutenir et me réconforter tout le long de mes études et parfois même au prix de durs sacrifices. Je saisis cette heureuse circonstance pour leur exprimer, dans un élan de fierté et de tendresse, mes sentiments de gratitude et de profonde affection. Les mots que je pourrais écrire ne sont pas à la hauteur de ce que je peux ressentir à leur égard. Ce travail leur est dédié.

Le soutien de mes frères, Ihssen, Hamed et Khalil a également été déterminant, chacun retrouvera sa contribution personnelle dans mon grand MERCI.

Un remerciement particulier à mon frère et mon meilleur ami Fehmi pour tout ce qu'il a fait pour moi, pour tout les services qu'il m'a rendus avant et pendant la thèse. Je ne serai lui exprimé ma gratitude.

Le mot de la fin c'est un vif et affectueux remerciement à ma chère épouse Hanène pour son soutien constant et inconditionnel, sa présence à mes cotés et surtout dans les moments difficiles.

Pour finir j'ai une profonde pensée à mon fils et mon ange Fehd qui n'a cessé

ces deux dernières années de thèse de signer, déchirer et égarer mes notes, je ne serai capable de lui exprimé l' amour que j'éprouverai toujours pour lui et la joie de l'avoir à mes cotés.





# Table des matières

Introduction	11
--------------	----

---

---

Partie I Fonctions d'utilités et optimisation de portefeuille	27
---	----

---

---

<b>Chapitre 1</b>	
Notion d'utilité et aversion au risque	29

1.1 Cadre Général . . . . .	29
1.2 Les préférences . . . . .	30
1.3 Un premier problème d'optimisation de Portefeuille . . . . .	55

<b>Chapitre 2</b>	
Fonctions d'Utilités et Optimisation de Portefeuille	

2.1 Introduction . . . . .	60
2.2 Notations . . . . .	61
2.3 Le Modèle . . . . .	62

2.4	Utilité et optimisation de portefeuille . . . . .	64
2.5	Méthode EDP . . . . .	67
2.6	Cadre markovien . . . . .	69
2.7	Approche des équations de Bellman par les solutions de vis- cosité . . . . .	79
2.8	Utilité et changement de numéraire . . . . .	84

### Chapitre 3

#### Méthode duale pour le problème d' optimisation de porte- feuille

3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Approche par Dualité . . . . .	92
3.3	Résolution par dualité . . . . .	96
3.4	Appendice . . . . .	123

## Partie II Utilités progressives 125

### Chapitre 4

#### Utilités progressives dynamiques

4.1	Introduction et Motivations . . . . .	128
4.2	Utilités progressive . . . . .	132
4.3	Exemples simples d'utilités . . . . .	137

### Chapitre 5

#### Utilité progressive et équations aux dérivées partielles sto- chastiques

5.1	Introduction . . . . .	153
5.2	Univers d'investissement . . . . .	153
5.3	Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP sto- chastiques . . . . .	155
5.4	Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux . . . . .	162

## Chapitre 6

### Utilités progressives et changement de numéraire

6.1	Introduction . . . . .	178
6.2	Changement de numéraire . . . . .	179
6.3	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS . . . . .	185
6.4	Utilités progressives et Portefeuilles Martingales . . . . .	192

## Chapitre 7

### Utilités progressives : Dualité

7.1	Introduction . . . . .	200
7.2	Dual convexe : définition et hypothèses . . . . .	201
7.3	Quelques propriétés des utilités progressives . . . . .	204
7.4	Dual convexe et EDP stochastiques . . . . .	212
7.5	Dual progressif . . . . .	219
7.6	Dual d'une utilité progressive vs dual progressif . . . . .	221
7.7	Utilités décroissantes . . . . .	224

## Chapitre 8

### Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

8.1	Introduction . . . . .	233
8.2	Caractérisation des utilités progressives ayant le même portefeuille optimal . . . . .	235
8.3	Approche par les flots stochastiques . . . . .	237
8.4	Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné . . . . .	240
8.5	Dual progressif . . . . .	248
8.6	Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire . . . . .	249
8.7	Flots et EDP stochastiques . . . . .	253
8.8	Retour sur le marché initial . . . . .	260

## Annexes

265

**Annexe A**

**Semimartingales Avec Paramètres Spatiaux 265**

A.1	Introduction . . . . .	266
A.2	Preliminaires . . . . .	266
A.3	Régularité par rapport à $x$ . . . . .	269
A.4	Lemme d'Itô-Ventzel & Formules d'intégration . . . . .	270
A.5	Équations différentielles stochastiques . . . . .	273
A.6	Flots stochastiques . . . . .	276

**Annexe B**

**Projection sur un cône convexe**

<b>Bibliographie</b>	<b>285</b>
----------------------	------------

# Introduction

Dans le monde de la finance traditionnelle, la réflexion sur le critère à optimiser dans le cas de la sélection de portefeuille par exemple est assez pauvre : on se fixe un horizon de gestion, une fonction concave (pour traduire l'aversion pour le risque) croissante et on cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale. La stratégie optimale est fortement dépendante de l'horizon de gestion et du critère. Or, dans le domaine de la banque d'investissement, des marchés à terme en particulier, une partie de l'activité porte sur des stratégies "*delta-hedgées*", c'est-à-dire peu sensibles à la tendance du marché, qu'on souhaite utiliser comme stratégies de référence. Par ailleurs, de plus en plus de problèmes, dont celui du financement des problèmes écologiques portent sur des horizons très longs, pour lesquels il est difficile de faire comme si le marché ne réajustait pas son critère en cas de changements importants des paramètres fondamentaux de l'économie.

En 2002, Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulou ont proposé un point de vue très nouveau sur ces questions, en introduisant la notion de "*forward utility*", c'est-à-dire une utilité dynamique, progressive, cohérente avec un marché financier donné. On peut voir ce processus comme un champ aléatoire  $u(t, x)$  adapté à l'information disponible, qui est à chaque instant une utilité standard (donc en particulier à la date 0, compatible avec une famille de stratégies données  $(X^\pi)$  au sens où pour tout  $t, h > 0$  on a

$$\mathbb{E}(u(t+h, X_{t+h}^\pi) | \mathcal{F}_t) \leq u(t, X_t^\pi) \quad (1)$$

et il existe un portefeuille optimal  $X^*$  pour lequel l'inégalité est une égalité.

Les auteurs ont fait plusieurs articles sur ce sujet, montrant en particulier comment les utilités classiques : puissance, exponentielle, etc doivent être modifiées

pour être des utilités dynamiques progressives. Une attention limitée a été portée à l'univers d'investissement.

Beaucoup de questions fondamentales sont posées autour de ces utilités stochastiques et très peu de réponses,

- Ces utilités sont définies à partir d'un problème d'optimisation de portefeuilles. Le problème est-il bien posé et ces utilités existent-elles vraiment ?
- Comment ces utilités s'adaptent-elles au marché financier considéré et comment intègrent-elles son évolution dynamique dans le temps ?
- Comment ces utilités s'adaptent-elles aux périodes de crises ?
- Ces utilités sont-elles concaves sur la totalité de leurs domaines de définitions ou bien seulement sur l'ensemble des stratégies de portefeuilles admissibles ?
- Sont-elles uniques et est-ce que la condition initiale est suffisante pour garantir cette propriété ou bien faut-il plus ?
- Que représente vraiment la condition initiale ?
- Les techniques classiques utilisées pour résoudre les problèmes d'optimisation à horizon fini sont-elles adaptées à ces nouveaux problèmes ?
- Quel est le lien entre ces nouveaux problèmes d'optimisation et les problèmes classiques ?
- Comment représentent-elles les préférences et l'aversion au risque d'un investisseur ?
- Si ces utilités sont des processus d'Itô, quels seraient alors ses paramètres de diffusion et comment expriment-ils l'évolution du marché et l'ensemble des contraintes imposées aux investisseurs ?
- ...

Puisque les travaux existants ne traitent que des exemples et des cas particuliers, sauf le cas des utilités progressives décroissantes dans le temps (voir [36] et [88]), et ne répondent pas à toutes ces interrogations, il est indispensable de reprendre en détail quelques notions de base : la notion de préférences ainsi que l'origine des fonctions d'utilités et des problèmes d'optimisation de portefeuilles. La thèse contient, alors, deux parties aux motivations très différentes.

---

## Fonctions d'utilités et optimisation de portefeuilles

Cette première partie est une sorte de "retour aux sources" sur les différents points importants de l'étude de ces problèmes d'optimisation : le critère de préférence, le marché financier auquel on se réfère, les contraintes de gestion qui en général rendent le marché incomplet, le problème dual. . . Les principaux résultats connus dans ce domaine sont rappelés de manière précise, en présentant à la fois le point de vue purement probabiliste ainsi que le point de vue des EDP non linéaires.

Le premier chapitre de cette partie rappelle les principaux résultats de l'existence d'une représentation numérique d'un ordre de préférence " $\succ$ " (paragraphe 1.2.1) et particulièrement d'une représentation numérique " $U$ " de " $\succ$ " de type "*Von Neumann-Morgenstern*" (paragraphe 1.2.2). La troisième partie de ce chapitre est dédiée à la définition d'une fonction d'utilité, ses principales propriétés, des exemples et paradoxes, traite un premier problème d'optimisation de portefeuille selon le critère d'utilité espérée et rappelle la notion d'aversion au risque et de l'équivalent certain.

Pour plus de détails sur ces représentations numériques ainsi qu'une étude complète des ordres de préférences, voir le chapitre 2 du livre [34], par Hans Föllmer et Alexander Schied .

Le deuxième chapitre est basé sur les chapitres 3 et 4 du livre de H. Pham [94]. Le marché considéré est très proche de celui considéré par Ioannis Karatzas et Steven Shreve dans les chapitres 4 et 5 de [55] : il s'agit d'un marché incomplet dans le sens où l'investisseur est contraint de choisir ses portefeuilles admissibles dans un cône convexe noté  $\mathcal{K}$ . Nous considérons ce marché, car c'est dans cet univers d'investissement que nous proposons d'étudier les utilités progressives tout au long de la seconde partie de cette thèse. L'idée est alors de nous rapprocher le plus du cadre choisi pour nos résultats futurs. Nous donnons alors la définition d'un problème d'optimisation de portefeuilles ainsi que celle de la



fonction valeur que nous notons par  $v$  et qui jouera un rôle similaire à celui des utilités progressives car toutes les deux sont définies à partir d'un problème d'optimisation comme suit

$$v(t, x) = \text{ess sup}_{\pi \text{ admissible}} \mathbb{E}(U(X_T^{x, \pi}) / \mathcal{F}_t)$$

où  $U$  désigne la fonction d'utilité de l'investisseur à la date de maturité  $T$ ,  $X_T^{x, \pi}$  sa richesse à maturité partant d'un capital initial  $x$  et ayant suivi la stratégie  $\pi$  entre  $t$  et  $T$  et  $\mathcal{F}$  désigne la filtration brownienne du modèle.

Le but par la suite est d'étudier en détails les propriétés de cette fonction valeur. La première approche que nous détaillerons dans ce chapitre est une approche par équations aux dérivées partielles. Nous nous plaçons dans un cadre markovien où nous supposons que les paramètres du modèle sont des fonctions du temps et du cours des actifs notés  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . En plus du temps et du cours des actifs, la fonction valeur est supposée être une fonction de la richesse.

Nous faisons aussi une hypothèse dite hypothèse de recollement des stratégies (hypothèse 2.3) et ce dans le but d'appliquer le principe de la programmation dynamique dans les paragraphes suivants.

Dans la section 2.5, nous supposons que la fonction  $v$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  en temps et de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à la richesse et les actifs. Nous montrons alors que  $v$  est solution d'une équation aux dérivées partielles de type *Hamilton-Jacobi-Bellman*, c-à-d.,

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + r_t x v'(t, x, \xi) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, v, \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \\ v(T, \cdot) = U \end{cases}$$

Les contraintes sur le portefeuille sont de type cône adaptatif. La non-linéarité de l'opérateur de projection complique certains résultats.

Par le théorème de vérification 2.3 et sous des hypothèses de croissance quadratique, nous déduisons l'unicité de la solution si elle existe.

Puisque de manière générale, la fonction valeur n'est pas toujours assez régulière, dans la section 2.7, nous approfondissons beaucoup plus notre étude et en nous penchant sur une approche des équations de *Hamilton-Jacobi-Bellman* par les solutions de viscosité. Cette méthode a été introduite au début par Crandall et Lions [12] pour des équations différentielles du premier ordre puis généralisée

aux équations différentielles du second ordre. Nous en donnons la définition et nous détaillons comment cette notion nous permet d'approcher les problèmes d'optimisation de portefeuilles. Comme dans le cas de régularité de la fonction valeur, un principe dit *principe de comparaison* nous permet de déduire l'unicité de la solution si elle existe.

Enfin, dans la dernière section 2.8 de ce chapitre, nous abordons la question des changements de marché par l'intermédiaire du numéraire (passer des euros en dollars). En effet, ce point jouera un rôle central dans les développements futurs.

Le troisième chapitre de cette partie est consacré à une seconde approche des problèmes d'optimisation de portefeuilles : il s'agit d'une approche par des méthodes de dualité. Pour l'idée générale de la formulation duale et de l'existence d'un optimum au problème primal, nous retenons une présentation proche de celle du chapitre 6 du livre [94] de Huyên Pham où l'auteur explique clairement l'idée de cette approche. Les difficultés techniques seront abordées et étudiées par la suite en se basant essentiellement sur les travaux de D. Kramkov et W. Schachermayer dans [60].

Le but de ce chapitre est non pas de reprendre des travaux existants, mais de comprendre cette méthode et essentiellement les techniques de preuves qui sont très différentes de celle de l'approche par des EDP, dans le but de les réutiliser dans la seconde partie.

Après avoir introduit le marché financier considéré dans ce dernier article, nous définissons comme dans le précédent chapitre le problème d'optimisation de portefeuille associé. Nous donnons par la suite la définition et la caractérisation de la transformée de *Fenchel-Legendre* d'une fonction concave, avant d'expliquer l'idée générale de la méthode exposée dans ce chapitre et de définir le problème d'optimisation dual.

Dans la section 3.3 et avant d'entamer la résolution par dualité, nous montrons sous certaines hypothèses et en raisonnant par des suites maximisantes que le problème d'optimisation de portefeuille admet un unique optimum. Ces hypothèses sont des hypothèses portées directement sur la fonction valeur elle-même

et seront satisfaites dès que l'élasticité asymptotique de la fonction d'utilité à maturité, définie comme suit

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)},$$

est inférieure strictement à 1.

Dans la suite, nous mettons en évidence les problèmes techniques rencontrés et nous rappelons les principaux théorèmes d'existence des solutions aux deux problèmes d'optimisation : primal et dual, dans le cadre du marché complet et incomplet. Les preuves de ces résultats sont très techniques et dues à D. Kramkov et W. Schachermayer.

Enfin, nous introduisons la notion de l'élasticité asymptotique, introduite pour la première fois par ces auteurs dans [60] et nous montrons comment elle jouera un rôle fondamental lors du raffinement des résultats précédents.

Sans apporter de nouveaux résultats, sauf sur les changements de numéraire, cette partie est vraiment la partie technique de référence qui permet de recentrer l'étude des utilités progressives sur les questions spécifiques à ces processus.

## Utilités progressives

La deuxième partie de cette thèse est vraiment nouvelle. Nous introduisons la notion des utilités progressives dynamiques. La définition que nous proposons est légèrement différente de celle donnée par M. Musiela et T. Zariphopoulou (voir par exemple [84], [89], [91], [86], [87], [88] ou encore Rogers *et al.* [36] et Zitkovic dans [115]). Dans cette partie, les utilités progressives sont étudiées en détails : exemples, cadre markovien, approche par des équations aux dérivées partielles stochastiques, changement de numéraire, approche par dualité et EDP stochastiques duales.

Les EDP stochastiques, dans cette thèse, sont établies pour la première fois et n'ont jamais étaient étudiées ou démontrées dans la littérature. Cette étude approfondie des utilités progressives nous a permis essentiellement de donner une interprétation de la volatilité de ces utilités, de l'impact de l'univers d'investissement sur la dynamique des utilités ainsi que celle de leurs transformées de

*Fenchel-Légendre.* Elle a mis en valeur la symétrie entre les deux problèmes, dual et primal, et entre les richesses optimales et les mesures martingales optimales, chose qui va jouer un rôle décisif dans le dernier chapitre.

Les réponses à toutes les questions que nous nous sommes posées ainsi que les principaux résultats de la thèse sont, essentiellement, établies dans le dernier chapitre. C'est une toute nouvelle approche des problèmes d'optimisation de portefeuille applicable au cadre classique que nous proposons. Cette approche est simple et efficace à la fois, basée sur les flots stochastiques monotones et des techniques de changement de variable. Dans ce dernier chapitre, nous construisons toutes les utilités progressives associées à un portefeuille optimal donné. Cette même technique de flot stochastique nous permet aussi de décomposer toute utilité progressive  $u$  comme l'intégrale d'une martingale locale  $\mathcal{Y}$  appliquée à l'inverse  $\mathcal{X}$  de la richesse optimale (monotone par rapport à sa condition initiale), c-à-d. de la forme

$$u(t, x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t, z)) dz.$$

Dans un cadre plus régulier des processus  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X}$ , nous établissons la dynamique du flot inverse  $\mathcal{X}$  à partir de celle de la richesse optimale, par des techniques de composition de ces champs :

- nous redémontrons les principaux résultats de ce chapitre par une seconde méthode d'EDS et d'EDPS.
- nous montrons comment notre approche permet de résoudre les EDP stochastiques, satisfaites par les utilités progressives, que nous avons établies dans les chapitres précédents.

Dans cette partie de la thèse nous avons besoin de quelques outils et résultats supplémentaires pour mener notre étude des utilités progressives. Dans l'appendice A, nous introduisons les semimartingales avec des paramètres spatiaux, nous énonçons une formule d'Itô généralisée appelée aussi la formule d'Itô-Ventzel. Ce résultat est un outil puissant, nécessaire et indispensable pour aborder les différentes questions autour des utilités progressives. Une introduction des flots stochastiques et un rappel des résultats les concernant, que nous utilisons dans cette thèse, sont fournis dans l'appendice A. Dans l'appendice B, nous rappelons et nous démontrons quelques résultats autour de l'opérateur de

projection sur un cône convexe fermé.

Dans le premier chapitre de la seconde partie de cette thèse, nous discutons de quelques problématiques et incohérences dans les problèmes d'optimisation de portefeuille étudiés dans les chapitres 2 et 3. Nous discutons essentiellement des questions de l'intertemporalité, des maturités multiples et de cohérence avec l'univers d'investissement. Pour répondre à ces interrogations, il s'avère que la seule alternative est de considérer des utilités dynamiques indépendantes de l'horizon d'investissement. Nous nous intéressons particulièrement à des utilités dites *progressives* ou encore des utilités *forward*, introduite pour la première fois par Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulou en 2002 [84]. L'avantage de ces utilités ainsi que des richesses optimales associées est qu'elles sont indépendantes de tout horizon d'investissement et s'adaptent au mieux avec le marché financier. Dans le premier chapitre de cette partie, nous donnons une définition des utilités progressives légèrement différente de celle de Zariphopoulou, car dans notre définition, définition qui suit, les richesses ne sont par forcément des richesses actualisées. En d'autres termes, le taux court  $r$  n'est pas nul :

**Définition 0.1.** *Nous appelons utilité progressive, définie sur l'espace filtré  $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  issue de la fonction d'utilité standard  $U$ , tout champ aléatoire  $\mathcal{F}$ -ment mesurable, et continu  $u : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto u(t, x)$  vérifiant*

*i) **Propriété de concavité :** Pour tout  $(t, \omega)$ ,  $x \mapsto u(t, \omega, x)$  est une utilité classique, strictement croissante et strictement concave. A l'instant 0,  $u(0, \omega, x) = U(x)$ .*

*ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** pour toute stratégie admissible  $\pi \in \mathcal{K}$ , de richesse  $X^\pi$ ,*

$$\mathbb{E}(u(t, X_t^\pi) / \mathcal{F}_s) \leq u(s, X_s^\pi), \quad \forall t \geq s \geq 0. \quad (2)$$

*En d'autres termes, pour toute stratégie d'investissement admissible,  $(u(t, X_t^\pi); t \geq 0)$  est une surmartingale locale.*

*iii) **Existence d'un optimum :** Pour toute richesse initiale  $x$ , il existe une stratégie admissible, notée  $\pi^* \in \mathcal{K}$ , de processus de richesse  $X^{x, \pi^*}$*

*telle que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{x, \pi^*}) / \mathcal{F}_r) = u(r, X_r^{x, \pi^*}), \quad \forall t \geq r \geq 0. \quad (3)$$

*En d'autres termes,  $u(t, X_t^{x, \pi^*})$  est une martingale continue.*

Nous donnons par la suite quelques exemples simples mais très instructifs sur les rôles respectifs des hypothèses de concavité et de cohérence avec le marché, à l'aide de certains outils, à la fois simples et efficaces, basés sur des techniques de changement de numéraire ainsi que de changement de probabilités. Ces exemples d'utilités que nous proposons d'étudier sont par définition croissantes strictement concaves, car elles sont définies sous la forme

$$u(t, x) = Z_t U\left(\frac{x}{Y_t}\right),$$

avec  $U$  une fonction d'utilité classique et les processus  $Y$  et  $Z$  sont strictement positifs.

Nous montrons alors que, malgré leur simplicité, il est difficile de vérifier la condition de compatibilité avec l'univers d'investissement (voir la définition ci-dessus). L'étude de ces transformations élémentaires des utilités standards donnent des résultats amusants, qui montrent le rôle très spécifique des utilités puissance ou exponentielle, les seules à pouvoir être adaptées en utilité progressive.

Enfin, nous montrons que ces utilités dynamiques vérifient une équation aux dérivées partielles stochastiques (4.32) de second ordre complètement non linéaire que nous allons retrouver dans un cadre beaucoup plus général.

Dans le second chapitre, nous traitons dans un premier temps le cadre particulier des utilités progressives markoviennes, puisqu'il n'est pas nécessaire d'introduire des outils nouveaux pour mener l'étude. Ces utilités sont alors solutions d'équations de type *Hamilton-Jacobi-Bellman* identiques à celles étudiées dans le deuxième chapitre (voir le paragraphe 2.6, Théorème 2.2), à la seule différence que, dans le cadre des utilités progressives et contrairement au cadre du

chapitre 2 de la première partie

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi u(t, x, \xi) + r_t x u'(t, x, \xi) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, \Delta_{\xi, x}^\sigma u, u'') = 0 \\ u(0, \cdot) = U. \end{cases}$$

Ces équations **HJB** sont des équations avec une condition initiale et non pas une condition finale. C'est pour cette raison, et vu qu'il n'existe aucun théorème de comparaison établi dans ce cadre précis, que les techniques classiques d'EDP ne nous permettent de conclure ni à l'existence ni à l'unicité des solutions, encore moins à leur concavité.

Par la suite, nous montrons que ces utilités markoviennes sont encore solutions de l'EDP stochastique (4.32) établie dans le chapitre précédent et dont le *drift* est contraint à la fois par le marché et par la dérivée de la volatilité de ces utilités. Ceci constitue notre principale motivation pour mieux comprendre la dynamique de ces utilités et le rôle joué par la volatilité associée. Pour ce, nous allons nous intéresser à un cadre plus général qui consiste à supposer que les utilités progressives sont des champs aléatoires ou encore des semi-martingales avec un paramètre spatial obéissant à une dynamique de la forme

$$du(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t. \quad (4)$$

Pour étudier ces processus d'Itô composés avec des richesses, c-à-d.  $u(t, X_t^{x, \pi})$ , nous avons besoin d'un outil puissant et adéquat à la fois. En particulier, il s'agit d'une formule d'Itô généralisée appelée aussi *formule d'Itô-Ventzel* (voir 5.1, voir aussi Kunita [74], paragraphe 3.3 pour une preuve détaillée de ce résultat). Cette formule, à elle seule, étant insuffisante, nous faisons une hypothèse de recollement de stratégies appelée aussi *hypothèse de bifurcation* (voir le paragraphe 5.4.3, hypothèse 5.3 ainsi que le premier chapitre du cours de Saint-Flour [20] de Nicole El Karoui pour la théorie générale). Nous montrons alors, comme dans les cadres des exemples du chapitre précédent, celui des utilités progressives markoviennes et encore comme pour l'optimisation classique (dite rétrograde puisqu'on reconstruit l'information à partir de la fin), que le terme  $\beta(t, x)$  dans la dynamique (4) est fortement contraint par le marché et qu'il contient un terme de type hamiltonien classique modifié par la présence

de la dérivée de la volatilité  $\Gamma(t, x)$  de l'utilité progressive.

$$\beta(t, x) + u' r_t x - \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [u' \eta_t + \Gamma'(t, x)] \right\|^2 = 0,$$

Ceci implique que l'utilité  $u$  satisfait l'équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre suivante,

$$\begin{cases} du(t, x) = \left\{ \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [u' \eta_t + \Gamma'] \right\|^2 - u' r_t x \right\} (t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t \\ u(0, \cdot) = U(\cdot) \end{cases}$$

où  $\eta$  désigne la prime de marché et  $r$  le taux court.

Enfin nous donnons une interprétation financière de ce paramètre  $\Gamma$  qui s'avère jouer un rôle fondamental dans toute notre étude, au niveau de l'utilité comme au niveau des processus optimaux. Par contre, montrer l'existence d'un lien entre la concavité de ces utilités et leur EDP stochastiques reste une question ouverte et un vrai challenge.

Les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives sont difficiles à étudier, complètement non linéaires et non intuitives. Dans un troisième chapitre de cette deuxième partie de la thèse, nous approfondissons la question du changement de numéraire abordée dans l'exemple 4.3.2 du chapitre 4. Nous montrons comment notre définition des utilités progressives 4.3, contrairement à celle de Zariphopoulou *et al.*, laisse cette nouvelle notion invariante par changement de numéraire. Nous montrons uniquement par vérification l'existence d'une équivalence entre les utilités progressives d'un marché avec celles d'un second, obtenu du premier par un changement de numéraire et ce dans le théorème 6.1. Dans la section 6.3, nous établissons les équations de *Hamilton-Jacobi-Bellman* et les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives d'un nouveau marché de numéraire  $Y$  (un processus d'Itô). Ces équations peuvent être beaucoup plus compliquées que celles du chapitre précédent, si le numéraire est quelconque : une difficulté supplémentaire vient de ce que, en général, l'espace des contraintes n'est pas invariant par changement de numéraire, les contraintes sur les portefeuilles dans le nouveau monde ne sont pas en général des cônes convexes et



les opérateurs de projection sont plus compliqués et perdent beaucoup de leur propriétés essentielles. Dans le dernier paragraphe du chapitre 3 de la deuxième partie, nous nous plaçons dans un numéraire très particulier ; le numéraire de marché noté par  $(H^{r,\eta})^{-1}$ . Le nouvel univers d'investissement est alors un univers où les portefeuilles admissibles sont des martingales locales, i.e le taux court et la prime de marché sont nuls ( $\tilde{r} = 0, \tilde{\eta} = 0$ ). Par contre, les contraintes  $\tilde{\mathcal{K}}$  ne sont pas des cônes sauf si les contraintes de départ :  $\mathcal{K}$  sont soit des espaces vectoriels, soit vérifient  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ . Les EDP stochastiques sont alors beaucoup plus simples et intuitives de la forme,

$$du(t, x) = \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma' \right\|^2(t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t. \quad (5)$$

Ceci nous permet de simplifier les calculs et surtout, avec beaucoup moins de paramètres, de mieux comprendre les enjeux et le rôle de la volatilité  $\Gamma$ .

Comme dans le chapitre 3 de la première partie, le quatrième chapitre de la seconde partie sera dédié au processus dual convexe d'une utilité progressive de la forme (4). Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre du **marché martingale** décrit dans le paragraphe 6.4. En outre, nous établissons les équivalents des principaux résultats dans le marché initial. Notre approche sera similaire à celle du chapitre précédent dans le sens où nous portons notre intérêt essentiellement à établir explicitement la dynamique du processus dual en fonction de celle de l'utilité. Dans une première section nous établissons les conditions nécessaires d'optimalités puis la dynamique de la transformée de *Fenchel*  $\tilde{u}$  d'une utilité progressive  $u$ . Nous montrons que cette dynamique est très similaire à celle de l'utilité progressive (6.40). En effet, le dual convexe  $\tilde{u}$  de  $u$  obéit à la dynamique suivante

$$\begin{aligned} d\tilde{u}(t, y) &= \frac{1}{2\tilde{u}''} \|\tilde{\Gamma}'^{\perp}\|^2(t, y) dt + \tilde{\Gamma}(t, y) dW_t \\ \text{où} \quad \tilde{\Gamma}(t, y) &= \Gamma(t, -\tilde{u}')(t, y) \end{aligned}$$

où nous rappelons que  $\Gamma$  désigne la volatilité de  $u$ ,

$$-\tilde{u}' = (u')^{-1} \text{ et } \tilde{\Gamma}'^{\perp} = \tilde{\Gamma}' - \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma'$$

Encore une fois, la volatilité  $\Gamma$  joue un rôle très important dans la dynamique duale et fixe la mesure martingale locale optimale. Nous montrons aussi que le dual convexe est, à son tour, solution d'un problème d'optimisation dual, l'équivalent du théorème 3.6 établi dans [60].

Vue les grandes similitudes entre les utilités progressives et leur dual convexes, ainsi que la forte analogie entre les EDP stochastiques respectives, la technique de dualité ne nous permet pas de résoudre ces problèmes d'optimisations progressifs. Par contre les techniques de changement de numéraire et de dualité nous permettent de mieux aborder les utilités progressives décroissantes dans le temps (paragraphe 7.7) étudiées par Zariphopoulou *et al.* [88] et Rogers *et al.* [36]. Nous donnons le principal théorème établi par ces auteurs et par changement de numéraire, nous obtenons une interprétation assez importante de ce résultat.

Les méthodes classiques basées sur les équations aux dérivées partielles et les techniques de dualité nous permettent de comprendre les processus d'utilités progressives et leurs dual convexes. La volatilité  $\Gamma$  de ces utilités joue un rôle fondamental dans ce nouveau concept d'utilités. Le terme  $\frac{\Gamma'}{u}$  s'interprète comme une prime de risque supplémentaire, entièrement générée par l'utilité stochastique. Par contre, ces approches classiques ne nous permettent pas de répondre à toutes les questions que nous nous sommes posées et qui sont essentiellement : l'unicité, l'existence et surtout comment construire ces utilités dans un cadre général. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser, dans le dernier chapitre de cette thèse, au développement d'une nouvelle approche de ces problèmes d'optimisation de portefeuilles même dans le cas classique. L'idée du dernier chapitre est très simple, basée sur l'interprétation de la dérivée de l'utilité le long de la trajectoire optimale. La nouvelle approche que nous proposons est une approche efficace basée simplement sur des techniques de changement de variables, inversion de flot stochastique ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité que nous rappelons dans une première partie de ce chapitre.

Dans le paragraphe 8.4.1, nous montrons un premier résultat général d'existence des utilité progressives pour un portefeuille donné

**Théorème 0.1.** *Soit  $X_t^*(x)$  un processus de portefeuille admissible, monotone par rapport à la condition initiale, et **martingale**. Désignons par  $\mathcal{X}(t, z)$  le flot inverse associé.*

*Pour toute fonction d'utilité  $u_0$  telle que  $u'_0(\mathcal{X}(t, z))$  soit intégrable au voisinage de  $z = 0$ , le processus stochastique*

$$u(t, x) = \int_0^x u'_0(\mathcal{X}(t, z)) dz, u(t, 0) = 0 \quad (6)$$

*est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale constante comme mesure martingale optimale.*

En d'autres termes, si  $X^*$  est strictement croissante et est une vraie martingale, alors il existe au moins une utilité progressive de la forme ci-dessus qui réplique cette richesse comme optimum. L'hypothèse de monotonie de la richesse optimale est une hypothèse très naturelle : on investit plus, on gagne plus. Dans le paragraphe 8.4.2, toujours partant des mêmes idées et de l'hypothèse de monotonie, et après avoir introduit la notion de flot stochastique et rappelé l'hypothèse de recollement des stratégies, nous proposons de construire toutes les utilités progressives dont le portefeuille optimal est donné. Bien que le fait que la mesure martingale minimale ne soit pas constante représente une difficulté supplémentaire, les preuves ainsi établies dans le cas particulier où  $X^*$  est une vraie martingale se généralisent assez facilement au cas général. Sous l'hypothèse 8.3 que nous développons dans ce chapitre en détails, nous obtenons alors le résultat suivant

**Théorème 0.2.** *Soit un marché martingale, dont l'espace de contraintes est désigné par  $\mathcal{K}$ . Nous nous donnons :*

- *un processus de richesse admissible  $(X_t^*(x)); x > 0$ , qui est une martingale locale strictement monotone par rapport à  $x$ , et dont le processus inverse est désigné par  $\mathcal{X}(t, x)$ .*

- *une famille  $(\mathcal{Y}(t, x)); x \geq 0$  de martingales locales strictement positives, strictement décroissante par rapport à  $x$ , satisfaisant les conditions d'Inada ;  $\mathcal{Y}(t, 0) = +\infty$ ,  $\mathcal{Y}(t, +\infty) = 0$ , et telle que  $\mathcal{Y}(t, x)$  soit intégrable au voisinage de  $x = 0$ . En particulier, la condition initiale  $\mathcal{Y}(0, x) = u'_0(x)$  est une fonction décroissante satisfaisant les conditions d'Inada.*

– On suppose que le couple satisfait les conditions nécessaires d’optimalité rappelées en 8.4.2, et qui impliquent notamment que la volatilité du processus  $\mathcal{Y}(t, x)$  appartienne au cône orthogonal de l’espace des contraintes.

– Les processus  $(\mathcal{Y}(t, x)X_t^*(x); x > 0)$  sont des vraies martingales.

Définissons un processus d’utilité stochastique, concave et croissante, par

$$u(t, x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t, z)) dz$$

Sous l’hypothèse 8.3,  $u(t, x)$  est une utilité progressive dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , de condition initiale  $u'_0$  et admettant  $X^*$  comme processus optimal et la martingale locale  $\mathcal{Y}(t, x)/\mathcal{Y}(0, x)$  comme mesure martingale optimale.

Les preuves de ces deux résultats principaux sont assez simples et reposent uniquement sur les conditions nécessaires d’optimalité que doit satisfaire le couple de processus  $(X^*, \mathcal{Y})$  ( $\mathcal{Y} = u'_0(x)$  dans le premier théorème), conditions rappelées ci-dessus dans le dernier théorème.

Pour illustrer notre approche, dans la section 8.6, nous montrons comment les utilités progressives simples que nous avons étudiées dans le premier chapitre de cette partie se décomposent sous la forme (7) du théorème précédent.

Dans un second paragraphe de cette section, partant d’une famille d’utilités progressives  $\{u_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$  dont les richesses optimales sont notées par  $X^{*,\alpha}$ , nous montrons, toujours à l’aide de quelques idées simples et naturelles, comment nous pouvons générer des nouvelles utilités progressives plus générales dont l’aversion au risque est tirée de manière aléatoire dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Dans cette construction, les utilités puissances ne présentent qu’un exemple concret pour illustrer la méthode proposée.

Dans une troisième partie de ce chapitre, à l’aide du lemme d’Itô généralisé et des techniques de composition et d’inversion des flots stochastiques, nous établissons une deuxième preuve des résultats précédents, en vérifiant d’abord la concavité puis que les processus  $u$  définis ci-dessus satisfont les EDP stochastiques d’une utilité progressive. Ceci nous permet alors de faire le lien avec les résultats des chapitres précédents et de proposer une méthode de résolution des EDP stochastiques associées aux utilités progressives.

Au début de cette seconde partie de ce manuscrit, notre but est d'étudier les utilités progressives dans l'univers d'investissement où le taux court et la prime de marché sont notés par  $r$  et  $\eta$ , c-à-d. les richesses ne sont pas forcément des martingales locales. Nous établissons alors les équivalents des résultats des paragraphes précédents établis dans le cadre de marché martingale où le taux court et la prime de marché sont nuls. Pour cela, nous rappelons quelques notations et résultats des chapitres précédents. Nous rappelons essentiellement l'univers d'investissement du chapitre 5 ainsi que les conditions d'optimalité que vérifie le couple des processus de richesse optimale  $\tilde{X}^*$  et surmartingale optimale  $\tilde{\mathcal{Y}}$ . Comme ces conditions d'optimalité sont très proches, voir identiques, à celles du marché martingale étudié jusque-là, nous déduisons par analogie l'équivalent des résultats des paragraphes précédents. Toutes les utilités progressives  $v$  dans cet univers d'investissement dont le portefeuille optimal est  $\tilde{X}^*$  se décomposent, en notant par  $\tilde{\mathcal{X}}$  l'inverse de  $\tilde{X}^*$ , sous la forme

$$v(t, x) = \int_0^x \tilde{\mathcal{Y}} \circ \tilde{\mathcal{X}}(t, z) dz$$

où le processus  $\tilde{\mathcal{Y}}$  est positif et strictement décroissant par rapport à  $x$  et tel que le couple  $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$  satisfait les conditions d'optimalité de ce marché.

Enfin, nous retournons à l'univers d'investissement de départ décrit dans 5.2 et où le taux court et la prime du marché sont notés respectivement par  $r$  et  $\eta$ . Nous montrons alors que les utilités progressives décroissantes étudiées par Zariphopoulou et al. [88] et Rogers et al. [36] et que nous avons abordées dans 7.7 représentent de bons exemples d'applications, s'écrivant sous la forme d'une primitive de la composée de deux flots stochastiques inversibles. Ceci vient par conséquent appuyer notre approche.

# Première partie

## Fonctions d'utilités et optimisation de portefeuille



# Chapitre 1

## Notion d'utilité et aversion au risque

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Cadre Général . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.2</b>	<b>Les préférences . . . . .</b>	<b>30</b>
1.2.1	Représentation numérique d'une relation de préférence . . . . .	31
1.2.2	Représentation de Von Neumann-Morgenstern . . . . .	37
1.2.3	Une définition de l'utilité . . . . .	48
1.2.4	Propriétés de la fonction d'utilité . . . . .	48
1.2.5	Équivalent certain . . . . .	49
1.2.6	Aversion au risque et équivalent certain . . . . .	51
<b>1.3</b>	<b>Un premier problème d'optimisation de Portefeuille . . . . .</b>	<b>55</b>

---

### 1.1 Cadre Général

L'étude du comportement du consommateur se fait en deux étapes. Il faut tout d'abord décrire les préférences des individus, c'est-à-dire comment ils préfèrent tel bien à un autre. Ensuite, le consommateur, ayant des ressources limitées, va rechercher la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire. La



combinaison des préférences et des contraintes de budget détermine les choix de consommation, et plus précisément quelle combinaison de biens les agents économiques choisiront afin de maximiser leur utilité.

Une grande partie des résultats et définitions de ce chapitre est basée sur le chapitre 2 du livre [34] de Hans Föllmer et Alexander Schied et les travaux de D. Bernoulli [9], John von Neumann et Oskar Morgenstern [110] et J. Leonard Savage [102].

## 1.2 Les préférences

On définit sur l'ensemble (au sens mathématique) des paniers de consommation la relation de préférence, c'est-à-dire qu'un agent peut exprimer une préférence entre deux paniers de bien.

On suppose que cette relation est :

- **complète** (l'agent est toujours capable de comparer deux paniers de biens).
- **transitive** (si l'agent préfère A à B et B à C, alors il préfère A à C).
- **de comparaison** (si l'agent compare les biens A et B, alors il les considère équivalents).
- **de dominance** (si l'agent préfère plus A à B).
- **de substituabilité** (si l'agent a préféré A par rapport à B à cause de la quantité, par exemple ; alors il est toujours possible de rendre ce dernier indifférent de A en compensant l'insuffisance de B par un surplus de quantité)

De plus, on supposera également qu'un consommateur préfère toujours consommer plus que moins. C'est-à-dire que si on prend un panier puis qu'on augmente la quantité d'un ou plusieurs biens, alors le nouveau panier sera préféré au panier initial (principe de non-satiété).

Cette hypothèse est contestable : on peut en effet penser que le consommateur va "saturer" au bout d'un moment et que la consommation de biens supplémentaires ne lui apporte plus de satisfaction supplémentaire. On va choisir de se placer dans un cadre de long terme (où la saturation est moins probable :

l'agent risque moins de saturer s'il peut répartir sa consommation sur toute une année par exemple). Notons également au passage que la rareté est au coeur de l'analyse économique et que, par conséquent, on s'intéresse plutôt aux situations où les agents sont confrontés à cette rareté et ne peuvent s'offrir tout ce qu'ils désirent.

### 1.2.1 Représentation numérique d'une relation de préférence

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de représentation numérique d'une relation de préférence. Les conditions d'existence d'une telle représentation dans un espace de fonctions  $\mathcal{X}$ , ont été étudiées et démontrées par J. Leonard Savage [102].

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble non vide. Un élément  $x \in \mathcal{X}$  est interprété comme étant un choix possible d'un agent économique. Si dans cet ensemble, entre deux éléments  $x$  et  $y$ , l'agent doit préférer l'un par rapport à l'autre, alors ceci nous amène à la définition suivante

**Définition 1.1.** *Un ordre de préférence  $\succ$  dans  $\mathcal{X}$  est une relation binaire, qui a les deux propriétés suivantes :*

- *Asymétrie : si  $x \succ y$ , alors  $y \not\succ x$*
- *transitivité négative : si  $x \succ y$  et  $z \in \mathcal{X}$ , alors soit  $x \succ z$  ou  $z \succ y$  ou bien les deux en même temps.*

La deuxième assertion s'interprète comme suit : Si l'agent a une nette préférence de  $x$  par rapport à  $y$ , et si on rajoute un troisième choix alors forcément  $x$  reste le plus préféré  $x \succ z$  ou bien  $y$  est le moins préféré  $z \succ y$ .

Un ordre de préférence  $\succ$  dans  $\mathcal{X}$  induit un ordre de préférence faible  $\succeq$  défini par

$$x \succeq y \Leftrightarrow y \not\succ x$$

et une relation d'indifférence  $\sim$  définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ et } y \succeq x$$

$x \succeq y$  veut dire  $x$  est préféré à  $y$  ou bien il n'y a pas de préférence claire entre les deux.

**Remarque 1.1.** *Il est bien clair que l'asymétrie et la transitivité négative de  $\succ$  sont équivalentes aux deux propriétés suivantes de  $\succeq$  :*

- *Complétude :  $\forall x, y \in \mathcal{X}$   $x \succeq y$  ou  $y \succeq x$ , ou bien les deux sont vraies.*
- *transitivité : si  $x \succeq y$  et  $y \succeq z$  alors  $x \succeq z$ .*

Inversement, toute relation complète transitive  $\succeq$  induit un ordre de préférences  $\succ$  par la négation de  $\succeq$ , c-à-d.,

$$x \succ y \Leftrightarrow y \not\succeq x.$$

La relation d'indifférence  $\sim$  est une relation d'équivalence, c-à-d, elle est réflexive, symétrique et transitive.

**Définition 1.2.** *Une représentation numérique d'un ordre de préférence noté  $\succ$  est une fonction  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$y \succ x \Leftrightarrow U(x) > U(y).$$

Ceci est clairement équivalent à la relation suivante

$$y \succeq x \Leftrightarrow U(x) \geq U(y).$$

Il faut remarquer qu'une telle représentation numérique  $U$  n'est pas unique : si  $f$  est une fonction strictement croissante quelconque, alors  $\tilde{U}(x) := f(U(x))$  est une représentation numérique différente de  $U$ .

**Définition 1.3.** *Soit  $\succ$  une relation de préférence sur  $\mathcal{X}$ . Un sous-ensemble de  $\mathcal{X}$ , noté  $\mathcal{Z}$ , est dit ordre dense si pour toute paire  $x, y$  dans  $\mathcal{X}$  telle que  $x \succ y$ , il existe un  $z \in \mathcal{Z}$  tel que  $x \succeq z \succeq y$ .*

Le résultat suivant caractérise les relations de préférence admettant une telle représentation numérique.

**Théorème 1.1.** *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une représentation numérique d'une relation de préférence  $\succ$  est l'existence d'un sous-ensemble dénombrable de  $\mathcal{X}$ , noté  $\mathcal{Z}$ , à ordre dense. En particulier, tout ordre de préférence sur  $\mathcal{X}$  admet une représentation numérique si  $\mathcal{X}$  est dénombrable.*

**Définition 1.4.** Soit  $\mathcal{X}$  un espace topologique. Une relation de préférence  $\succ$  est continue si pour tout  $x \in \mathcal{X}$

$$\overline{\mathcal{B}}(x) := \{y \in \mathcal{X} \mid y \succ x\} \quad (1.1)$$

$$\underline{\mathcal{B}}(x) := \{y \in \mathcal{X} \mid x \succ y\} \quad (1.2)$$

sont des ensembles ouverts de  $\mathcal{X}$ .

**Remarque 1.2.** Tout ordre de préférence qui admet une représentation numérique continue est lui-même continu. Sous certaines hypothèses sur l'ensemble  $\mathcal{X}$ , on montrera dans la suite que la réciproque est vraie.

**Définition 1.5** (Espace de Hausdorff). Un espace séparé ou espace de Hausdorff est un espace topologique dans lequel, pour deux points distincts  $x$  et  $y$  quelconques, il existe un voisinage de  $x$  et un voisinage de  $y$  disjoints.

**Proposition 1.1.** Soit  $\succ$  un ordre de préférence dans un espace topologique de Hausdorff  $\mathcal{X}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $\succ$  est continue.
- (b) L'ensemble  $\{(x, y) \mid y \succ x\}$  est ouvert dans  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ .
- (c) L'ensemble  $\{(x, y) \mid y \succeq x\}$  est fermé dans  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ .

*Démonstration.* Raisonnons par étapes :

(a)  $\Leftarrow$  (b) : On a à démontrer que pour toute paire

$$(x_0, y_0) \in M := \{(x, y) \mid y \succ x\}$$

il existe deux ouverts  $U, V \subset \mathcal{X}$  tels que  $x_0 \in U, y_0 \in V$ , et  $U \times V \subset M$ . Considérons d'abord le cas où il existe un  $z \in \mathcal{B}(x_0) \cap \mathcal{B}(y_0)$ . Alors, on a  $y_0 \succ z \succ x_0$ , et donc  $U := \underline{\mathcal{B}}(z)$  et  $V := \overline{\mathcal{B}}(z)$  sont deux voisinages ouverts respectivement de  $x_0$  et  $y_0$ . De plus, si  $x \in U$  et  $y \in V$ , alors  $y \succ z \succ x$ , et donc  $U \times V \subset M$ .

Si  $\overline{\mathcal{B}}(x_0) \cap \underline{\mathcal{B}}(y_0) = \emptyset$ , alors on pose  $U := \underline{\mathcal{B}}(y_0)$  et  $V := \overline{\mathcal{B}}(x_0)$ . Si  $(x, y) \in U \times V$ , alors par définition, on a  $y_0 \succ x$  et  $y \succ x_0$ . L'objectif étant de montrer que  $y \succ x$  afin d'établir que  $U \times V \subset M$ . On suppose pour cela que  $x \succeq y$ . Alors

$y_0 \succ y$  par transitivité négative, et donc  $y_0 \succ y \succ x_0$ . Mais alors, on obtient la contradiction suivante :  $y \in \overline{\mathcal{B}}(x_0) \cap \underline{\mathcal{B}}(y_0) \neq \emptyset$ .

(b) $\Leftarrow$ (c) : D'abord, notons que la fonction  $\phi(x, y) := (y, x)$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . D'autre part, l'ensemble  $\{(x, y) | y \succeq x\}$  est le complémentaire de l'ouvert  $\phi(\{(x, y) | y \succ x\})$ .

(c) $\Leftarrow$ (a) : Comme  $\mathcal{X}$  est un espace topologique de Hausdorff,  $\{x\} \times \mathcal{X}$  est fermé dans  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . De plus on a,

$$\{x\} \times \mathcal{X} \cap \{(x, y) | y \succeq x\} = \{x\} \times \{y | y \succeq x\}.$$

Par conséquent,  $\{y | y \succeq x\}$  est fermé dans  $\mathcal{X}$  ce qui implique que son complémentaire  $\{y | x \succ y\}$  est un ouvert.

On montre ainsi par les mêmes arguments que  $\{y | y \succ x\}$  est un ouvert. Ce qui achève la preuve.  $\square$

**Définition 1.6** (Espace connexe.). *Soit un espace topologique  $\mathcal{X}$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\mathcal{X}$  n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.
- $\mathcal{X}$  n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.
- Toute application continue  $f : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$  est constante.

*Dans le cas où ces conditions sont remplies, on dit que l'espace  $\mathcal{X}$  est connexe.*

**Définition 1.7** (Espace séparable.). *On dit qu'un espace topologique  $\mathcal{X}$  est séparable s'il possède une partie  $Z$  dense au plus dénombrable.*

**Proposition 1.2.** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace topologique connexe et soit  $\succ$  un ordre de préférences continu dans  $\mathcal{X}$ . Alors, tout ensemble dense  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{X}$  est un ordre dense (définition 1.3). En particulier  $\succ$  admet une représentation numérique, si  $\mathcal{X}$  est séparable.*

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathcal{X}$  tel que  $y \succ x$ , et on considère  $\overline{\mathcal{B}}(x)$  et  $\underline{\mathcal{B}}(y)$  (définis dans (1.1) et (1.2)). Donc  $x \in \underline{\mathcal{B}}(y)$  et  $y \in \overline{\mathcal{B}}(x)$ . Ceci implique que ni  $\overline{\mathcal{B}}(x)$  ni  $\underline{\mathcal{B}}(y)$  n'est vide. D'autre part, la négative transitivité de  $\succ$  implique que  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{B}}(x) \cup \underline{\mathcal{B}}(y)$  et comme  $\mathcal{X}$  est connexe alors ces deux ensembles ne peuvent être disjoints, ce qui implique que l'ensemble  $\overline{\mathcal{B}}(x) \cap \underline{\mathcal{B}}(y)$  est un ouvert non vide. Comme  $\mathcal{Z}$  est dense dans  $\mathcal{X}$  alors il existe

$$z \in \mathcal{Z} \cap (\overline{\mathcal{B}}(x) \cap \underline{\mathcal{B}}(y))$$

qui satisfait

$$y \succ z \succ x.$$

Par conséquent,  $\mathcal{Z}$  est un ordre dense. □

**Théorème 1.2.** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace topologique qui satisfait l'une des assertions suivantes :*

- $\mathcal{X}$  admet une base dénombrable d'ensembles ouverts.
- $\mathcal{X}$  est connexe séparable.

*Alors tout ordre de préférence dans  $\mathcal{X}$  admet une représentation numérique continue.*

Pour la preuve, voir [16].

**Lemme 1.1.** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace métrique connexe qui admet un ordre de préférences continu  $\succ$ . Si  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dont la restriction à un sous-ensemble  $\mathcal{Z}$  dense de  $\mathcal{X}$  est la représentation numérique de la restriction de  $\succ$  à  $\mathcal{Z}$ , alors  $U$  est une représentation numérique de  $\succ$  dans tout l'espace  $\mathcal{X}$ .*

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathcal{X}$  tels que  $y \succ x$ . Alors pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer que :

$$y \succ x \iff U(y) > U(x) \tag{1.3}$$

Commençons par démontrer l'implication directe.

( $\implies$ ) : Comme  $\mathcal{Z}$  est dense dans  $\mathcal{X}$ , d'après la proposition 1.2, l'ensemble  $\mathcal{Z}$  est un ordre dense dans  $\mathcal{X}$  ce qui implique l'existence d'un  $z_0 \in \mathcal{Z}$  tel que

$$y \succ z_0 \succ x.$$

Par le même raisonnement, on obtient qu'il existe  $z'_0 \in \mathcal{Z}$  tel que

$$z_0 \succ z'_0 \succ x.$$

En itérant la procédure, on construit deux suites  $(z_n)_{n \geq 0}$  et  $(z'_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{Z}$  telles que  $z_n \rightarrow y$  et  $z'_n \rightarrow x$ . De plus

$$z_n \succ z_0 \succ z'_0 \succ z'_n$$

ce qui implique que

$$U(z_n) > U(z_0) > U(z'_0) > U(z'_n).$$

Par la suite, par la continuité de  $U$ , et vu la convergence des suites  $(z_n)_{n \geq 0}$  et  $(z'_n)_{n \geq 0}$ , on obtient que

$$U(z_n) \rightarrow U(y) \quad \text{et} \quad U(z'_n) \rightarrow U(x).$$

Et donc

$$U(y) \geq U(z_0) > U(z'_0) \geq U(z'_n).$$

Ainsi, le premier sens de l'équivalence est prouvé.

Inversement, on suppose que  $x$  et  $y$  sont tels que  $U(y) > U(x)$ . On a alors par continuité de  $U$  que les ensembles

$$\overline{\mathcal{U}}(x) := \{z \in \mathcal{X} \mid U(z) > U(x)\}$$

$$\underline{\mathcal{U}}(y) := \{z \in \mathcal{X} \mid U(z) < U(y)\}$$

sont des ouverts non vides de  $\mathcal{X}$ . De plus  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{U}}(x) \cup \underline{\mathcal{U}}(y)$ . Or par hypothèse,  $\mathcal{X}$  est un espace connexe, ce qui implique dans la définition 1.6 que  $\overline{\mathcal{B}}(x) \cap \underline{\mathcal{B}}(y) \neq \emptyset$ . On choisit  $z_0 \in \overline{\mathcal{U}}(x) \cap \underline{\mathcal{U}}(y)$ . On remarque alors que

$$U(x) < U(z_0) < U(y). \tag{1.4}$$

On définit par la suite et de la même manière  $\underline{\mathcal{U}}(z_0)$ . Le même raisonnement nous permet alors de déduire que  $\overline{\mathcal{U}}(x) \cap \underline{\mathcal{U}}(z_0) \neq \emptyset$ , donc  $\forall z'_0 \in \overline{\mathcal{U}}(x) \cap \underline{\mathcal{U}}(z_0)$ , en utilisant (1.4)

$$U(x) < U(z'_0) < U(z_0) < U(y). \tag{1.5}$$

Par itération, on construit ainsi deux suites  $(z_n)_{n \geq 0}$  et  $(z'_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{Z}$  (rappelons que  $\mathcal{Z}$  est dense dans  $\mathcal{X}$ ) telles que  $z_n \rightarrow y$  et  $z'_n \rightarrow x$  vérifiant  $U(z_n) > U(z_0)$  et  $U(z'_n) < U(z'_0)$ .

Par la suite, et puisque par hypothèse  $U$  est une représentation numérique de  $\succ$  dans  $\mathcal{Z}$ , on a :

$$z_n \succ z_0 \succ z'_0 \succ z'_n.$$

Finalement, par la continuité de  $\succ$ , ni  $z_0 \succ y$  ni  $x \succ z'_0$  n'est vraie. Grâce à la transitivité négative, on obtient alors que  $y \succ x$ . □

### 1.2.2 Représentation de Von Neumann-Morgenstern

On suppose qu'à chaque choix possible  $x \in \mathcal{X}$  que peut faire l'agent correspond une distribution de probabilité dans un ensemble de scénarios possibles. L'ensemble  $\mathcal{X}$  peut être donc identifié à un sous ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}(S, \mathcal{S})$  : l'espace de toutes les distributions de probabilités sur un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ . Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont appelés *loteries*, et dans toute la suite on fera l'hypothèse que  $\mathcal{M}$  est convexe.

Le but de cette section est de caractériser les ordres de préférences notés  $\succ$  dans  $\mathcal{M}$  possédant une représentation numérique de la forme.

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx). \quad (1.6)$$

Cette formulation des préférences de loteries en termes d'utilité est due à D. Bernoulli [9].

**Définition 1.8** (Représentation de Von Neumann-Morgenstern). *Une représentation numérique  $U$  d'un ordre de préférence  $\succ$  dans  $\mathcal{M}$  est une représentation de Von Neumann-Morgenstern si elle est de la forme (1.6).*

Une représentation de Von Neumann-Morgenstern est dite affine dans  $\mathcal{M}$  si et seulement si  $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}$  et  $\alpha \in [0, 1]$ , on a

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu).$$

Il est facile, par la suite, de voir que cette propriété que la préférence de  $\mu$  à  $\nu$ , c-à-d que  $\mu \succ \nu$ , est préservée dans n'importe quelle combinaison convexe à l'aide d'une troisième loterie  $\lambda \in \mathcal{M}$ . On appelle cette propriété axiome d'indépendance. Cette théorie axiomatique, que nous détaillerons un peu plus dans la suite, a été initiée par John von Neumann et Oskar Morgenstern dans [110].

**Définition 1.9.** *Une relation de préférence  $\succ$  dans  $\mathcal{M}$  satisfait l'axiome d'indépendance si,  $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}$  la relation  $\mu \succ \nu$  implique*

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$$

$\forall \lambda \in \mathcal{M}$  et  $\alpha \in (0, 1]$ .



Cet axiome est aussi appelé *axiome de substitution*. En effet, on considère deux loteries  $\mu$  et  $\nu$  de  $\mathcal{M}$  telles que  $\mu \succ \nu$  et on introduit une troisième loterie  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda$  qui consiste à tirer  $\mu$  avec une probabilité  $\alpha$  ou tirer  $\lambda$  avec une probabilité  $1 - \alpha$ . Si on tire  $\lambda$ , alors dans ce cas il n'y a pas de différence entre considérer la loterie  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda$  ou  $\alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$  car le tirage réalisé vaut  $\lambda$ . Par contre, si on réalise  $\mu$  qui est préférée à  $\nu$  alors là on voit bien qu'on préfère  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda$  à  $\alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$ .

**Définition 1.10.** *Une relation de préférence  $\succ$  dans  $\mathcal{M}$  satisfait l'axiome d'Archimède si, pour chaque triplet  $\mu \succ \lambda \succ \nu$ , il existe  $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$  tel que*

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1 - \beta)\nu$$

Cet axiome dérive de son homologue ; le principe d'Archimède en analyse, c-à-d  $\forall \varepsilon > 0$  et  $\forall x$  grand on peut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n\varepsilon > x$ .

Cet axiome est aussi appelé *axiome de continuité*. On suppose que l'ensemble  $\mathcal{M}$  est muni d'une topologie sous laquelle les combinaisons convexes de la forme  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$  sont continues, c-à-d convergent vers  $\mu$  si  $\alpha \rightarrow 1$  et vers  $\nu$  si  $\alpha \rightarrow 0$ . Alors, dans ce cadre, la continuité de l'ordre de préférence  $\succ$  implique immédiatement cet axiome.

**Remarque 1.3.** *Cet axiome est moins intuitif que le précédent. En effet, pour mieux le comprendre, on considère les 3 loteries déterministes suivantes :*

$$\mu \rightarrow 1000\text{€}, \lambda \rightarrow 10\text{€}, \nu \rightarrow \text{décès à coup sûr}.$$

*Même pour un paramètre  $\alpha$  très petit, il n'est pas clair qu'un agent va préférer la loterie  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$  (qui évoque le décès avec une probabilité non nulle) à la loterie  $\lambda$  qui consiste elle à gagner uniquement 10€ à coup sûr. Pourtant, la majorité des gens n'hésite pas à faire 100 Km de plus par jour pour gagner 1000€ supplémentaires lorsqu'ils courent le risque d'un accident mortel.*

Le théorème qui suit prouve que l'axiome d'indépendance et celui d'Archimède impliquent l'existence d'une représentation numérique affine (définition).

**Théorème 1.3.** *Soit  $\succ$  une relation de préférence qui satisfait les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède définis ci-dessus. Alors elle admet une représentation numérique affine  $U$ . De plus  $U$  est unique à une transformation affine près, c-à-d toute autre représentation numérique affine  $\tilde{U}$  de  $\succ$  est de la forme :*

$$\tilde{U} = aU + b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Avant de donner la démonstration de ce résultat, on donne deux cas importants dans lesquels une représentation de type Von Neumann-Morgenstern existe. Ceci se traduit par les deux corollaires qui suivent.

Pour le premier corollaire, on a besoin de la notion de *distribution de probabilité simple*.

**Définition 1.11.**  $\mu \in \mathcal{M}$  est dite une *distribution de probabilité simple* si c'est une mesure de probabilité dans  $S$  qui peut être écrite sous la forme d'une combinaison convexe de masse de Dirac, c-à-d  $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$  tel que

$$\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}.$$

Maintenant, énonçons le premier corollaire.

**Corollaire 1.1.** *Supposons que  $\mathcal{M}$  est l'ensemble de toutes les distributions de probabilité simples dans  $S$ , et supposons que  $\succ$  est un ordre de préférence qui satisfait les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède. Alors  $\succ$  admet une représentation de type Von Neumann-Morgenstern  $U$ . De plus,  $U$  et  $u$  introduites dans (1.6) sont uniques à une transformation affine près.*

*Démonstration.* D'après le théorème 1.3, il existe une représentation numérique affine de  $\succ$ . On définit donc  $u(x) := U(\delta_x)$ , pour  $x \in S$ .

Si  $\mu \in \mathcal{M}$ , alors elle s'écrit par hypothèse sous la forme  $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$ . Donc comme  $U$  est affine, alors ceci implique que

$$U(\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U(\delta_{x_i}) = \int u(x) \mu(dx),$$

ce qui prouve le corollaire. □

**Corollaire 1.2.** *On suppose que  $\mathcal{M}$  est l'ensemble de toutes les distributions de probabilités dans un ensemble fini  $S$ , et supposons que  $\succ$  est un ordre de préférence qui satisfait les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède. Alors  $\succ$  admet une représentation de type Von Neumann-Morgenstern unique à une transformation affine près.*

*Démonstration.* Dans un ensemble fini, toutes les mesures de probabilité sont simples. Donc ce corollaire n'est autre qu'un cas particulier du corollaire précédent.  $\square$

**Lemme 1.2.** *Sous les hypothèses du théorème 1.3, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Si  $\mu \succ \nu$  et si  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , alors*

$$\beta\mu + (1 - \beta)\nu \succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu.$$

(b) *Si  $\mu \succ \nu$  et  $\mu \succcurlyeq \lambda \succcurlyeq \nu$  alors il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $\lambda \sim \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$ .*

(c) *Si  $\mu \sim \nu$ , alors  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \sim \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$  et tout  $\lambda \in \mathcal{M}$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par étapes :

(a) : Soit  $\lambda := \beta\mu + (1 - \beta)\nu$ . D'après l'axiome d'indépendance, on a :

$$\lambda \succ \beta\nu + (1 - \beta)\nu = \nu$$

pour  $\gamma := \alpha/\beta$ . Ainsi, on obtient que

$$\beta\mu + (1 - \beta)\nu = (1 - \gamma)\lambda + \gamma\lambda \succ (1 - \gamma)\nu + \gamma\lambda = \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu.$$

(b) L'unicité est une conséquence de (a). Pour l'existence, il suffit de se focaliser sur le cas  $\mu \succ \lambda \succ \nu$ , car les deux autres cas  $\mu \sim \lambda$  et  $\lambda \sim \nu$  sont triviaux et correspondent à un choix de  $\alpha$  qui vaut respectivement 1 et 0 respectivement. Un candidat naturel est le suivant

$$\alpha := \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \lambda \succcurlyeq \gamma\mu + (1 - \gamma)\nu\}.$$

Dans la suite, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc que  $\lambda \not\sim \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$ . Alors l'une des assertions suivantes est vraie,

- i)  $\lambda \succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$ ,
- ii)  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda$ .

Si la première assertion est satisfaite, alors, en appliquant l'axiome d'Archimède, il existe  $\beta \in (0, 1)$  tel que

$$\lambda \succ \beta[\alpha\mu(1 - \alpha)\nu] + (1 - \beta)\mu = (1 - \gamma)\nu + \gamma\mu, \quad (1.7)$$

pour un paramètre  $\gamma = 1 - \beta(1 - \alpha)$  et vérifiant  $\gamma - \alpha = (1 - \beta)(1 - \alpha) \geq 0$ . Donc, par définition de  $\alpha$ , on a forcément  $\gamma\mu + (1 - \gamma)\nu \succ \lambda$ , ce qui est en contradiction avec (1.7).

Dans le cas où  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda$ , toujours par l'axiome d'Archimède, il existe  $\beta \in (0, 1)$  tel que

$$\beta[\alpha\mu(1 - \alpha)\nu] + (1 - \beta)\nu = \beta\alpha\mu + (1 - \beta\alpha)\nu \succ \lambda. \quad (1.8)$$

Clairement  $\beta\alpha < \alpha$ , donc par définition de  $\alpha$ , il existe un  $\gamma \in (\beta\alpha, \alpha]$  pour lequel  $\lambda \succ \gamma\mu + (1 - \gamma)\nu$ . Encore une fois, en utilisant le fait que  $\beta\alpha < \alpha$  et (a), on obtient que

$$\lambda \succ \gamma\mu + (1 - \gamma)\nu \succ \beta[\alpha\mu(1 - \alpha)\nu] + (1 - \beta)\nu,$$

ce qui est en contradiction avec (1.8).

(c) Il est facile de voir que démontrer (c) est équivalent à montrer que ni l'un ni l'autre des deux cas suivants n'est vrai :

- i)  $\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$ ,
- ii)  $\alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda$ .

Pour prouver ceci, on supposera qu'il existe  $\rho \in \mathcal{M}$  tel que  $\rho \approx \mu \sim \nu$ . En effet, dans le cas contraire, on a  $\mathcal{M} = \{\mu\}$  et le résultat devient trivial.

On suppose maintenant que  $\rho \succ \mu$ , le cas  $\mu \succ \rho$  étant similaire. Supposons que le premier cas est satisfait. Par l'axiome d'indépendance, et pour tout  $\beta \in (0, 1)$ , on a

$$\beta\rho + (1 - \beta)\nu \succ \beta\nu + (1 - \beta)\nu = \nu \sim \mu,$$

ce qui implique que

$$\alpha[\beta\rho + (1 - \beta)\nu] + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda, \quad \forall \beta \in (0, 1).$$

Par la suite, en utilisant l'hypothèse  $\alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda$  et (b), on déduit qu'il existe un unique  $\gamma$  ( $\beta$  fixé) tel que :

$$\begin{aligned} \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda &\sim \gamma[\alpha(\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda) + (1 - \alpha)\lambda] + (1 - \gamma)\alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda \\ &= \alpha[\beta\gamma\rho + (1 - \beta\gamma)\nu] + (1 - \alpha)\lambda \\ &\succ \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation précédente en remplaçant  $\beta$  par  $\beta\gamma$  en dernière étape. Ceci constitue bien une contradiction.

Le deuxième cas se montre de la même manière. □

*Démonstration.* (théorème 1.3)

Pour la construction de  $U$ , on considère dans un premier temps deux loteries  $\lambda$  et  $\rho$  telles que  $\lambda \succ \rho$  et on définit l'ensemble

$$\mathcal{M}(\lambda, \rho) := \{\mu \in \mathcal{M} \mid \lambda \succeq \mu \succeq \rho\}.$$

le résultat est trivial si une telle paire  $\lambda \succ \rho$  n'existe pas.

Si  $\mu \in \mathcal{M}(\lambda, \rho)$ , la partie (b) du lemme 1.2 implique qu'il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $\mu \sim \alpha\lambda + (1 - \alpha)\rho$ . On pose alors  $U(\mu) := \alpha$ . Pour prouver que  $U$  est une représentation numérique de  $\succ$  sur  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$ , on doit montrer que, pour  $\nu, \mu \in \mathcal{M}(\lambda, \rho)$ , on a  $U(\mu) > U(\nu)$  si et seulement si  $\mu \succ \nu$ .

Commençons par l'implication inverse. On applique la partie (a) du lemme 1.2 pour conclure que :

$$\mu \sim U(\mu)\lambda + (1 - U(\mu))\rho \succ U(\nu)\lambda + (1 - U(\nu))\rho \sim \nu,$$

et donc  $\mu \succ \nu$ . Inversement, si  $\mu \succ \nu$ , alors l'argument précédent implique qu'il est impossible d'avoir  $U(\nu) > U(\mu)$ . Il reste alors à discuter le cas  $U(\mu) = U(\nu)$ . En effet, si  $U(\mu) = U(\nu)$ , alors la définition de  $U$  implique que  $\mu \sim \nu$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\mu \succ \nu$ . On conclut alors que  $U$  est une représentation numérique de  $\succ$  restreinte à  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$ .

Montrons que  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$  est un ensemble convexe. Soient  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\lambda, \rho)$  et  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors

$$\lambda \succeq \alpha\lambda + (1 - \alpha)\nu \succeq \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu.$$

Utilisons l'axiome d'indépendance pour les cas  $\lambda \succ \nu$  et  $\lambda \succ \mu$ , ainsi que la partie (c) du lemme 1.2 pour les cas  $\lambda \sim \nu$  et  $\lambda \sim \mu$ . En se basant sur le même argument, on obtient que

$$\begin{aligned} & \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu) \\ & \sim \alpha (U(\mu)\lambda + (1 - U(\mu))\rho) + (1 - \alpha) (U(\nu)\lambda + (1 - U(\nu))\rho) \\ & = [\alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu)] \lambda + [1 - \alpha U(\mu) - (1 - \alpha)U(\nu)] \rho. \end{aligned}$$

La définition de  $U$  ainsi que l'unicité dans la partie (b) du lemme 1.2 impliquent que

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu).$$

Donc  $U$  est une représentation numérique affine de  $\succ$  sur  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$ . La dernière étape consiste à montrer que la représentation numérique affine  $U$  de  $\succ$  sur  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$  est unique à transformation affine positive près. Donc, soit  $\tilde{U}$  une autre représentation numérique affine de  $\succ$  sur  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$  et soit, pour  $\mu \in \mathcal{M}(\lambda, \rho)$ ,

$$\hat{U} := \frac{\tilde{U}(\mu) - \tilde{U}(\rho)}{\tilde{U}(\lambda) - \tilde{U}(\rho)}.$$

Alors  $\hat{U}$  est une transformation affine positive de  $\tilde{U}$  telle que  $\hat{U}(\rho) = 0 = \mathcal{U}(\rho)$  et  $\hat{U}(\lambda) = 1 = \mathcal{U}(\lambda)$ . Ainsi, le caractère affine de  $\hat{U}$  et la définition de  $U$  impliquent que

$$\hat{U}(\mu) = \hat{U}(U(\mu)\lambda + (1 - U(\mu))\rho) = U(\mu)\hat{U}(\lambda) + (1 - U(\mu))\hat{U}(\rho) = U(\mu)$$

pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(\lambda, \rho)$ . Alors  $\hat{U} = U$ .

Enfin, il reste à prouver que  $U$  peut être prolongée en une représentation numérique sur tout l'ensemble  $\mathcal{M}$ . On considère alors  $\tilde{\lambda}, \tilde{\rho} \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathcal{M}(\tilde{\lambda}, \tilde{\rho}) \supset \mathcal{M}(\lambda, \rho)$ . En utilisant le même argument qu'au début de cette preuve, on prouve qu'il existe une représentation numérique affine  $\tilde{U}$  de  $\succ$  sur  $\mathcal{M}(\tilde{\lambda}, \tilde{\rho})$  sous l'hypothèse que  $\tilde{U}(\lambda) = 1$  et que  $\tilde{U}(\rho) = 0$ . Dans le cas contraire, on peut s'y ramener par une transformation affine positive de  $\tilde{U}$ . D'après l'étape précédente, on conclut que  $\tilde{U}$  coïncide avec  $U$  sur  $\mathcal{M}(\lambda, \rho)$ , ainsi  $\tilde{U}$  s'avère être l'unique prolongement consistant de  $U$ . Comme chaque loterie appartient à un ensemble  $\mathcal{M}(\tilde{\lambda}, \tilde{\rho})$  donné, la représentation numérique affine  $U$  peut être prolongée d'une manière unique à tous les sous-ensembles de  $\mathcal{M}$ . Ceci achève la démonstration.

□

**Remarque 1.4.** Dans la preuve du théorème 1.3 ci-dessus, on n'a pas utilisé le fait que les éléments de  $\mathcal{M}$  sont des mesures de probabilité. La clé de la démonstration consiste en la convexité de  $\mathcal{M}$  et les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède.

Revenons maintenant au problème de construction d'une représentation numérique de type Von Neumann-Morgenstern d'une relation de préférence dans l'espace des distributions de probabilité. Si  $\mathcal{M}$  est l'ensemble de toutes les distributions de probabilité dans un ensemble fini  $S$ , alors toute représentation numérique est forcément de ce type comme on a vu dans la preuve du corollaire 1.2. La situation devient un peu plus compliquée et demande plus d'hypothèses dans le cas où l'ensemble  $S$  est infini. Comme on peut le voir dans les deux exemples qui suivent, le théorème 1.3 n'est plus vrai de manière générale, c-à-d une représentation numérique de type von Neumann-Morgenstern peut ne pas exister.

**Exemple 1.1.** Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de probabilité dans  $S = 1, 2, 3, \dots$  dans lequel  $U(\mu) := \lim_{k \nearrow +\infty} k\mu(k)$  existe et bien fini.  $U$  est évidemment affine et induit une relation de préférence qui vérifie les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède, pourtant,  $U$  n'admet pas une représentation numérique de von Neumann-Morgenstern.

**Exemple 1.2.** Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de probabilité dans  $S = [0, 1]$ , et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue dans  $S$ . Par le théorème de décomposition de Lebesgue, tout  $\mu \in \mathcal{M}$  peut être décomposé comme une somme de deux mesures

$$\mu = \mu_s + \mu_a$$

avec  $\mu_s$  une mesure singulière par rapport à  $\lambda$  et une deuxième mesure absolument continue  $\mu_a$ . On définit donc la fonction  $U : \mathcal{M} \longrightarrow [0, 1]$  par

$$U(\mu) := \int x \mu_a(dx)$$

qui est bien une fonction affine dans  $\mathcal{M}$  et induit une relation de préférence  $\succ$  vérifiant les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède, mais ne peut admettre la représentation numérique (1.6) car  $U(\delta_x) = 0 \forall x$  donc la seule possibilité dans (1.6) est de prendre  $u \equiv 0$ . Donc la relation de préférence  $\succ$  induite

par  $U$  ne peut être que triviale dans le sens où  $\mu \sim \lambda$  quel que soit  $\mu \in \mathcal{M}$ , ce qui est en contradiction avec le fait  $U(\lambda) = \frac{1}{2}$  et  $U(\delta_{\frac{1}{2}}) = 0$ .

Supposons que l'ordre de préférence  $\succ$  est continu dans le sens de la définition 1.4. Comme on l'a déjà remarqué, l'axiome d'Archimède est automatiquement vérifié dans ce contexte, si on suppose de plus que l'axiome d'indépendance est à son tour vérifié, alors comme l'indique le résultat suivant une représentation numérique de la forme (1.6) existe et est unique dans un sens qu'on précisera.

**Théorème 1.4.** *Soit  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1(S)$  l'ensemble de toutes les mesures de probabilité dans  $S$  muni de la topologie faible, et soit  $\succ$  un ordre de préférence continu dans  $\mathcal{M}$  et vérifiant l'axiome d'indépendance. Alors il existe une représentation numérique de von Neumann-Morgenstern*

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx) \quad (1.9)$$

où  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée et continue. De plus  $U$  et  $u$  sont uniques à une transformation affine près.

*Démonstration.* On note par  $\mathcal{M}_S$  l'espace de toutes les distributions de probabilités simples dans  $S$ . Comme on l'a déjà noté, la continuité de  $\succ$  induit l'axiome d'Archimède donc en appliquant le corollaire 1.1 la restriction de  $\succ$  dans  $\mathcal{M}_S$  admet une représentation numérique de la forme (1.6).

On montre d'abord que la fonction  $u$  dans cette représentation est bornée, pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose par exemple que cette fonction n'est pas bornée supérieurement, donc il existe une séquence  $x_0, x_1, \dots \in S$  tel que  $u(x_0) < u(x_1)$  et  $u(x_n) > n$ . Notons maintenant

$$\mu_n := \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\delta_{x_0} + \frac{1}{\sqrt{n}}\delta_{x_n}$$

et remarquons,  $\mu_n \rightarrow \delta_{x_0}$  si  $n \rightarrow +\infty$ . la continuité de  $\succ$  plus le fait que  $\delta_{x_1} \succ \delta_{x_0}$  impliquent qu'à partir d'un certain rang on préférera  $\delta_{x_1}$  à  $\mu_n$ , c-à-d  $\delta_{x_1} \succ \mu_n$ .

Or

$$U(\mu_n) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)u(x_0) + \frac{1}{\sqrt{n}}u(x_n) > \frac{1}{\sqrt{n}}u(x_n) > \sqrt{n}, \quad \forall n$$

Ce qui est contradictoire avec  $\delta_{x_1} \succ \mu_n$  pour  $n$  grand.



Continuité : de la même manière, on va raisonner par l'absurde en supposant que  $u$  n'est pas continue ce qui impliquera en particulier l'existence d'un  $x \in S$  et d'une suite  $x_n \rightarrow x$  si  $n \rightarrow +\infty$  et tel que  $u(x_n) \not\rightarrow u(x)$ . Par la suite, il est facile de montrer qu'il existe une sous-suite de  $(x_n)_{n \geq 1}$  notée encore  $(x_n)_{n \geq 1}$  tel que  $u(x_n) \rightarrow l \neq u(x)$ , on suppose que  $u(x) - l := \varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $m \in \mathbb{N}$  telque

$$|u(x_n) - l| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq m$$

Soit  $\lambda := \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{x_m})$ . Alors  $\forall n \geq m$ ,

$$U(\delta_x) = l + \varepsilon > l + \frac{2\varepsilon}{3} > \frac{1}{2}(u(x) + u(x_m)) = U(\lambda) > l + \frac{\varepsilon}{3} > U(\delta_{x_n})$$

Ce qui implique, clairement,  $\delta_x > \lambda > \delta_{x_n}$ , or  $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_x$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , car, par hypothèse,  $x_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x$ , ceci nous donne alors la contradiction voulue, et donc la continuité de  $u$ .

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à prouver que

$$U(\mu) := \int u(x)\mu(dx), \quad \forall \mu \in \mathcal{M}$$

est bien une représentation numérique de  $\succ$  dans l'ensemble  $\mathcal{M}$ . Comme  $u$  est bornée continue, ceci implique la continuité  $U$  dans  $\mathcal{M}$  muni de la topologie faible. De plus par le théorème A.22 de [34] page 387, l'ensemble  $\mathcal{M}_S$  est dense dans  $\mathcal{M}$ . La démonstration est donc achevée en appliquant le lemme 1.1.  $\square$

Dans tout ce qui précède, on a présenté la théorie générale autour des relations de préférences et les fonctions d'utilités, notamment les deux axiomes d'indépendance et d'Archimède qu'un ordre de préférence doit vérifier, en plus de la continuité, pour pouvoir être représenté sous une forme de type Von Neumann-Morgenstern. Ceci est la théorie, mais d'une manière générale et en pratique, les gens ne raisonnent pas exactement de cette manière, comme le montre bien l'exemple suivant, dû à M.Allais [3].

**Exemple 1.3.** (*"Allais Paradox"*) Cet exemple est basé sur les deux observations suivantes :

- Soit  $\nu_1$  la loterie donnée par

$$\nu_1 = 0.33\delta_{2500} + 0.66\delta_{2400} + 0.01\delta_0$$

on gagne 2500 € avec une probabilité 0.33, 2400 € avec une probabilité 0.66 et enfin rien avec une probabilité 0.01, et on note  $\mu_1$  la loterie qui nous fait gagner 2400 euros à coup sûr. En posant la question aux gens, on remarque immédiatement que la plupart préfère gagner 2400 € à coup sûr, malgré que l'espérance des gains de la première loterie égale à 2409 soit plus grande que l'espérance de la deuxième 2400.

- On considère maintenant les deux loteries suivantes :

$$\mu_2 = 0.34\delta_{2400} + 0.66\delta_0$$

$$\nu_2 = 0.33\delta_{2500} + 0.67\delta_0$$

Dans ce cas, et contrairement au premier, les gens préfèrent la loterie  $\nu_2$  à  $\mu_2$  en accord avec leurs espérances qui valent 825 € pour  $\nu_2$  et 816 pour  $\mu_2$ .

Cette observation due à M.Allais [3] a été confirmée par D.Kahnemann et A.Tversky [106] en faisant des tests empiriques, où 82% des personnes questionnés préfèrent  $\mu_1$  à  $\nu_1$  et 83% choisissent  $\nu_2$  plutôt que  $\mu_2$ , ce qui veut dire que 65% des gens choisissent  $\mu_1 \succ \nu_1$  et  $\nu_2 \succ \mu_2$ . Allais a donc remarqué que ce choix simultané est paradoxal dans le sens d'inconsistance avec le modèle de von Neumann-Morgenstern, plus précisément, toute relation de préférence pour laquelle  $\mu_1 \succ \nu_1$  et  $\nu_2 \succ \mu_2$  ne vérifie forcément pas l'axiome d'indépendance.

En effet, si l'axiome d'indépendance est satisfait alors, nécessairement, on a

$$\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\nu_2 \succ \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\nu_2 \succ \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\mu_2.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , en particulier pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2) \succ \frac{1}{2}(\nu_1 + \mu_2).$$

Or par des simples calculs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2) &= 0.5\delta_{2400} + 0.165\delta_{2500} + 0.335\delta_0 \\ &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2) = 0.5\delta_{2400} + 0.165\delta_{2500} + 0.335\delta_0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction. Et donc, l'axiome d'indépendance est violé par 65% des gens questionnés.

**Remarque 1.5.** À ce stade, nous avons étudié les conditions d'existence d'une représentation numérique  $u$  d'un ordre de préférence. Dans le paragraphe 2.4 (p.74) du chapitre 2 de [34], les auteurs se penchent sur la question d'une relation de préférence  $\succ$  qui satisfait :  $\mu \succ \nu$  implique  $\int u d\mu \geq \int u d\nu$  et ce quel que soit la fonction  $u$  : c'est la notion de préférence uniforme. De même, dans le paragraphe 2.5 (p.89), les auteurs introduisent la notion de préférence robuste. Mais nous ne détaillons pas ces notions dans ce chapitre car ceci n'a pas de liens avec nos travaux futurs.

### 1.2.3 Une définition de l'utilité

**Définition 1.12.** Soit  $U$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .  $U$  est une représentation de la relation de préférence  $\succeq$  si et seulement si quels que soient  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  on a

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq U(y_1, y_2, \dots, y_n) \iff X \succeq Y$$

La fonction  $U$  est dite alors la fonction d'utilité. Dans le cas où  $U$  est dérivable, la dérivée de  $U$  par rapport à la richesse  $x$ , est appelée utilité marginale.

**Remarque 1.6.** L'intérêt de travailler avec des fonctions plutôt qu'avec des relations de préférence est immédiat. On peut facilement utiliser tout ce que l'on sait en analyse. De plus, et c'est bien le but recherché, on peut chiffrer la satisfaction par rapport au gain. Mais la construction de cette fonction n'est pas seulement un agrément mathématique. Il s'agit d'un véritable choix méthodologique qui peut d'ailleurs être contesté.

### 1.2.4 Propriétés de la fonction d'utilité

Il est assez intuitif de supposer que, pour la quasi-totalité des biens, une augmentation de la quantité d'un bien dans un panier augmente ou laisse inchangée l'utilité retirée de ce panier. C'est pourquoi nous imposons à la fonction d'utilité d'être croissante en chacun de ses arguments :

$$\forall i, \frac{\partial U}{\partial x_i} \geq 0$$

En revanche, nous pouvons également penser que cette augmentation n'est pas indépendante de la quantité de ce bien déjà disponible dans le panier. Ainsi, si un premier gain procure une très grande satisfaction, le second est déjà moins bon. Cela signifie que l'utilité marginale de chaque nouveau gain est inférieure à celle du précédent : l'utilité marginale est décroissante,

$$\forall i, \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \leq 0.$$

Nous obtenons alors des fonctions d'utilité concaves, et donc des courbes d'indifférence définissant des ensembles convexes.

Si de plus nous supposons que chaque nouveau gain procure une satisfaction qui ne devient jamais nulle, propriété dite de non-saturation, alors dans ce cas la fonction d'utilité est strictement croissante :

$$\forall i, \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0.$$

Le bien-fondé de cette hypothèse repose sur la rationalité de l'agent : si l'utilité est bien définie, l'agent ne perdra jamais son temps à consommer quelque chose qui est dommageable pour lui ou qui ne lui apporte rien.

Nous pouvons, enfin se restreindre aux domaines où l'utilité marginale est strictement décroissante :

$$\forall i, \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0.$$

### 1.2.5 Équivalent certain

Dans toute la suite, on va supposer que la relation de préférence considérée admet une représentation de *Neumann-Morgenstern* càd il existe une fonction  $u$  (appelé aussi fonction d'utilité : strictement concave, strictement croissante et continue) telle que pour toute variable aléatoire  $X$  admettant une distribution  $\mu$  on a :

$$U(X) = \int u d\mu.$$

On définit par la suite le nombre :

$$m(X) := \int x \mu(dx).$$

**Remarque 1.7.** – Pour un sous-jacent  $X$  aléatoire (actualisé) dont la distribution  $\mu$  est connu, la valeur  $m(X)$  est appelée "the fair price" de  $X$ .  
– Pour un contrat financier dont  $\mu$  est la distribution de ses paiements futurs à percevoir avec un risque donné, la valeur  $m(X)$  est dite "the fair premium".

On considère maintenant une relation de préférence donnée  $\succeq$ , admettant une représentation de *Neumann-Morgenstern* :

$$U(X) = \int u d\mu$$

Appliquons par la suite le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction  $u$  (strictement croissante et continue), il existe alors un unique réel  $c(X)$  vérifiant l'identité :

$$u(c(X)) = U(X) = \int u d\mu_X \quad (1.10)$$

**Définition 1.13.** *L'équivalent certain du payoff aléatoire  $X$  est défini par le nombre  $c(X)$ , et la quantité :*

$$\rho(X) := m(X) - c(X)$$

*est appelée le "risk premium" de  $X$  ou encore de la loterie  $\mu_X$ .*

**Remarque 1.8.**

- *L'équivalent certain  $c(X)$  peut être interprété comme "upper bound" pour tout prix acceptable de  $X$  pour un agent de fonction d'utilité  $u$  (ou encore  $U$ ).*
- *Le risk premium doit être interprété comme le montant qu'un agent est prêt à payer pour répliquer  $X$  par son espérance.*

**Exemple 1.4.** (*"Le Paradoxe de St Petersburg"*)

*Considérons la distribution suivante*

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \delta_{2^{n-1}}$$

qui est le payoff du jeu suivant : on tire au pile et face jusqu'à la première fois où face apparaît. Si face apparaît au  $n$ -ième tirage on gagne  $2^{n-1}$  euros. Jusqu'au 18ème siècle le prix de cette loterie était considéré comme étant égal à son espérance ou encore son "fair price"  $m(\mu) = +\infty$ . Donc le prix de ce jeu valait l' $\infty$  alors qu'en demandant aux gens, il est très difficile de trouver quelqu'un qui est prêt à déboursier 20 euros pour ce jeu. En vue de ce paradoxe qui a été mis en évidence par Nicholas Bernoulli en 1713, Gabriel Cramer et Daniel Bernoulli [9] ont introduit indépendamment l'idée de déterminer le prix de ce jeu comme l'équivalent certain par rapport aux deux fonctions d'utilités, respectives, suivantes

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = \log(x)$$

Ces équivalents certains sont calculés à partir de l'équation (1.10) et valent :

$$C^u(\mu) = (2 - \sqrt{2})^{-2} \approx 2.91, \quad C^v(\mu) = 2$$

qui sont bien dans la fourchette de prix que les gens sont prêts à payer pour accéder à ce jeu.

**Remarque 1.9.** Notons que, pour toute fonction d'utilité non bornée supérieurement, on peut modifier le payoff de telle sorte que le paradoxe réapparaisse. Il suffit juste remplacer, pour  $n > 1000$ , le payoff  $2^n$  par  $u^{-1}(2^n)$ , pour que

$$\int u(x)\mu(dx) = +\infty$$

Donc en choisissant une fonction d'utilité bornée on peut surmonter cette difficulté, bien que ceci en fasset apparaître d'autres.

### 1.2.6 Aversion au risque et équivalent certain

Pour une fonction d'utilité  $u$  suffisamment régulière, en appliquant le développement de Taylor autour des deux points  $x = c(X)$  et  $m = m(X)$  on obtient d'une part :

$$u(c(X)) \approx u(m) + u'(m)(c(X) - m) = u(m) - u'(m)\rho(X),$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
 u(c(X)) &= \int u(x)\mu(dx) \\
 &= \int [u(m) + u'(m)(x - m) + \frac{1}{2}u''(m)(x - m)^2 + r(x)]\mu(dx) \\
 &\approx u(m) + \frac{1}{2}u''(m)\text{var}(X)
 \end{aligned}$$

avec  $r$  le reste du développement de Taylor de la fonction  $u$ , on peut par la suite écrire la nouvelle identité suivante :

$$\rho(X) \approx -\frac{u''(m)}{2u'(m)}\text{var}(X) =: \frac{1}{2}ARa(m)\text{var}(X). \quad (1.11)$$

$ARa(m)$  peut être interprété comme le facteur par lequel un agent de fonction d'utilité  $u$ , multiplie son risque mesuré par  $\frac{1}{2}\text{var}(X)$ , dans le but de déterminer (calculer) le "risk premium" qu'il est prêt à payer.

**Définition 1.14.**  $ARa(m)$  est appelé aversion au risque absolue.

On considère un agent de fonction d'utilité notée par  $U$  et de richesse initiale  $x$ . Une question qu'on peut poser est la suivante :

Quel sera l'impact d'une variation de cette richesse initiale sur le comportement de l'agent face à son risque ?

Il est relativement naturel d'imaginer que, quand sa richesse augmente, l'individu devient moins sensible au risque quand il joue à des loteries.

Comment sa fonction d'utilité peut-elle décrire son comportement ?

Comment peut-on savoir que l'agent devient  $\pm$  sensible (averse au risque) ou indifférent ?

Si  $U$  est de classe  $C^2$ , le coefficient d' aversion absolue au risque défini ci-dessus par

$$ARa(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \quad (1.12)$$

permet de donner les réponses à nos questions.

- L'agent a une aversion non croissante pour le risque  $\iff ARa$  est non croissante.

- L'agent a une aversion non décroissante pour le risque  $\iff ARa$  est non décroissante.
- L'agent a une aversion constante pour le risque  $\iff ARa$  est une fonction constante de  $x \implies U$  est une transformation positive de la fonction  $-e^{-\int_0^x ARa(y)dy}$ .

**Remarque 1.10.** *Ara n'est rien d'autre que la valeur absolue de l'indice de courbure de la fonction  $U$ .*

*On dira alors que le consommateur  $A$  de fonction d'utilité  $U$  a au moins autant d'aversion au risque que le consommateur  $B$  de fonction d'utilité  $V$  si  $U$  est plus concave que  $V$  en tout  $x$  càd*

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} \geq -\frac{V''(x)}{V'(x)}$$

Comme les fonctions d'utilités ne sont uniques qu'à une transformation linéaire affine près, une mesure qui reste constante et décrit le comportement d'un agent est utile. Cette mesure est le coefficient d'aversion au risque absolue.

En effet si  $U$  est l'utilité d'un agent alors  $V = aU + b$  est encore une fonction d'utilité pour ce même individu, on dérive alors une fois pour faire disparaître  $b$ , puis une deuxième fois et on prend le quotient pour faire disparaître  $a$ , ce qui nous donne :

$$V' = aU', V'' = aU'' \implies \frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{V''(x)}{V'(x)}$$

Cette mesure décrit bien le comportement d'un agent sur un même marché. Elle est constante pour toute les utilités d'un même marché pour un agent donné. Si on change de marché, cette mesure ne peut nous décrire le lien entre les deux marchés.

On peut encore décrire le lien entre la prime de risque et les caractéristiques de la fonction d'utilité par l'*aversion relative au risque*, on définit alors

$$AR(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \tag{1.13}$$

comme étant le coefficient d'aversion relative au risque. Il représente une modification multiplicative du risque absolu par rapport à un risque de référence. Ce coefficient reste encore une mesure de l'aversion au risque.



## Interprétation

- L'aversion absolue au risque est la somme que l'investisseur est prêt à payer pour éviter une augmentation de la variance de sa richesse d'une unité.
- L'aversion relative au risque est la proportion de sa richesse que l'investisseur est prêt à payer pour éviter une augmentation de la variance de sa richesse d'une unité.

**Exemples :** Les classes de fonctions d'utilités suivantes et les coefficients d'aversion au risque correspondants sont des exemples standard.

**Aversion au risque constante (CARA) :**  $AR(x) = \gamma \implies u$ , à une transformation affine près, est de la forme  $u(x) = a - be^{-\gamma x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$

**Aversion au risque proportionnelle à  $\frac{1}{x}$  (HARA) :**  $AR(x) = \frac{(1-\gamma)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $\gamma \in [0, 1)$ , toujours à une transformation affine près, on a

$$u(x) = \log(x), \text{ si } \gamma = 0$$

$$u(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \text{ si } 0 < \gamma < 1$$

Le cas  $\gamma = 1$  correspond à une fonction d'utilité affine.

Une des propriétés de l'aversion au risque est donnée dans le résultat suivant.

**Proposition 1.3.** *Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions différentiables dans un intervalle  $S$ . En notant par  $AE^u$  et  $AE^v$  les coefficients d'aversion au risque correspondants, on a équivalence entre les assertions suivantes :*

- (a)  $AE^u(x) \geq AE^v(x)$ ,  $\forall x \in S$
- (b) Il existe une fonction  $F$  concave strictement croissante telle que  $u = F \circ v$
- (c) Les risk premium associés  $\rho^u$  et  $\rho^v$  sont tels que  $\rho^u(X) \geq \rho^v(X)$ ,  $\forall X$ .

*Démonstration.* (a)  $\implies$  (b) Comme  $v$  est strictement croissante, on peut définir son inverse  $w$  et par conséquent la fonction  $F(y) := u \circ w(y)$  est croissante, deux fois différentiable et satisfait  $u = F \circ v$ . En effet,

$$w' = \frac{1}{v' \circ w}, \quad w'' = AE^v \circ \frac{w}{(v' \circ w)^2}$$

donc les deux dérivées, première et seconde de  $F$  sont données par

$$F' = u'(w)w' = \frac{u'(w)}{v'(w)} > 0$$

et

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{v'(w)u''(w) - u'(w)v''(w)}{(v' \circ w)^3} \\ &= \frac{u'(w)}{(v'(w))^2} (AE^v - AE^u) \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $F$  est concave strictement croissante.

(b)  $\Rightarrow$  (c) La preuve de cette implication est basée essentiellement sur l'inégalité de Jensen qui, appliquée à l'équivalent certain dans (1.10), nous montre que

$$u(c^u(\mu)) = \int u d\mu = \int F \circ v d\mu \tag{1.14}$$

$$\leq F\left(\int v d\mu\right) = F(v(c^v(\mu))) = u(c^v(\mu)). \tag{1.15}$$

Par la suite  $\rho^u(\mu) = m(\mu) - c^u(\mu) \geq m(\mu) - c^v(\mu) = \rho^v(\mu)$ , d'où le résultat.

(c)  $\Rightarrow$  (a) On suppose (c), en raisonnant par l'absurde : (a) est fausse implique l'existence d'un intervalle  $\mathcal{O} \subset S$ , tel que  $AE^u(x) < AE^v(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{O}$ . On note  $\mathcal{O}^v := v(\mathcal{O})$ , et notons encore  $w$  l'inverse de  $v$ . D'après la formule de la dérivée seconde de  $F = u \circ w$  établie ci-dessus,  $F$  est strictement convexe dans l'ouvert  $\mathcal{O}^v$ . Si, par la suite,  $\mu$  est une mesure à support dans  $\mathcal{O}$ , alors l'inégalité (1.14) est inversée et devient stricte, à moins que  $\mu$  est concentrée en un point. Ce qui implique que  $\rho^u(x) < \rho^v(x)$ , ce qui est contradictoire avec (c).  $\square$

## 1.3 Un premier problème d'optimisation de Portefeuille

Etant donnée une relation de préférence dans un ensemble  $\mathcal{M}$ , on peut essayer de déterminer la distribution maximale de  $\succ$  dans  $\mathcal{M}$ . Le problème d'optimisation de portefeuilles qu'on considère ici est très simple : soit  $X$  une variable aléatoire, majorée par une constante  $a$ , dans un espace de probabilité

$(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  et dont la distribution  $\mu$  n'est pas dégénérée. La question est alors la suivante : quelle est la meilleure combinaison

$$X_\lambda := \lambda c + (1 - \lambda)X$$

de payoff risqué  $X$  et d'actif sans risque (constant)  $c \in S$  ?

Si on évalue  $X_\lambda$  par le critère de l'utilité espérée  $\mathbb{E}[u(X_\lambda)]$ , et si on note par  $\mu_\lambda$  la distribution de cette variable, alors on est en train de chercher le maximum de la fonction  $f$ , définie par

$$f(\lambda) := U(\mu_\lambda) = \int u d\mu_\lambda \quad (1.16)$$

qui est une fonction strictement concave qui atteint son maximum en un unique point  $\lambda^* \in [0, 1]$ .

**Proposition 1.4.** *Dans le cadre du problème d'optimisation de portefeuille décrit ci-dessus, la proportion optimale à investir dans l'actif sans risque est donnée par*

(a) on a

$$\lambda^* = 1, \quad \text{si } \mathbb{E}(X) \leq c$$

$$\lambda^* > 0, \quad \text{si } c \geq c(\mu)$$

(b) si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\lambda^* = 1 \iff \mathbb{E}(X) \leq c$$

$$\lambda^* = 0 \iff c \leq \frac{\mathbb{E}[Xu'(X)]}{\mathbb{E}[u'(X)]}$$

*Démonstration.* (a) En appliquant l'inégalité de Jensen à  $f$ , on obtient

$$f(\lambda) \leq u(\mathbb{E}(X_\lambda)) = u((1 - \lambda)X + \lambda c)$$

avec égalité si et seulement si  $\lambda = 1$ . Par conséquent  $\lambda^* = 1$  si la quantité à droite de cette inégalité est croissante en  $\lambda$ , c-à-d si  $\mathbb{E}(X) \leq c$ .

De plus part la stricte concavité de  $u$  implique

$$\begin{aligned} f(\lambda) &\geq \mathbb{E}[(1 - \lambda)u(X) + \lambda u(c)] \\ &= (1 - \lambda)u(c(\mu)) + \lambda u(c) \end{aligned}$$

### 1.3. Un premier problème d'optimisation de Portefeuille

---

avec égalité si et seulement si  $\lambda \in \{0, 1\}$ . Le terme à droite de cette inégalité est croissant en  $\lambda$  si  $c \geq c(\mu)$ , et ceci implique  $\lambda^* > 0$ .

(b) On a clairement  $\lambda^* = 0$  si et seulement si la dérivée à droite  $f'_+$  de  $f$  satisfait  $f'_+(0) \leq 0$ .

Notons  $u_+$  et  $u_-$  les dérivés à droite et à gauche de  $u$ , et remarquons que le terme

$$\frac{u(X_\lambda) - u(X)}{\lambda} = \frac{u(X_\lambda) - u(X)}{X_\lambda - X}(c - X)$$

est presque sûrement borné par

$$u'_+(a)|c - X| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{si } a \leq c \wedge X$$

et, donc, converge quand  $\lambda \downarrow 0$  vers

$$u'_+(X)(c - X)_+ - u'_-(X)(c - X)_-.$$

Par la suite, le théorème de Lebesgue implique

$$f'_+(0) = \mathbb{E}[u'_+(X)(c - X)_+] - \mathbb{E}[u'_-(X)(c - X)_-].$$

Si maintenant, on suppose que l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- La fonction  $u$  est dans  $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ .
- L'ensemble  $\{x | u'_+(x) \neq u'_-(x)\}$  est  $\mu$ -mesure nulle,

alors la dernière égalité devient,

$$f'_+(0) = \mathbb{E}[u'(X)(c - X)]$$

c-à-d,  $f'_+(0) \leq 0$  si et seulement si

$$c \leq \frac{\mathbb{E}(Xu'(X))}{\mathbb{E}(u'(X))}.$$

En répétant maintenant le même raisonnement on peut montrer

$$f'_-(1) = u'_-(c)\mathbb{E}[(c - X)_-] - u'_+(c)\mathbb{E}[(c - X)_+]$$

donc, si  $u$  est dérivable en  $c$ , alors on obtient

$$f'_-(1) = u'(c)(c - \mathbb{E}[X])$$

ce qui implique  $f'_-(1) < 0$  et donc  $\lambda^* < 1$  si et seulement si  $\mathbb{E}(X) > c$ .

**Remarque 1.11.** Si  $u \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$  alors par concavité, en appliquant le développement de Taylor-Lagrange, l'équivalent certain est tel que

$$u(c(X)) \leq u(X) + (c(X) - X)u'(X).$$

Comme  $u(c(X)) = \mathbb{E}(u(X))$  par définition, on déduit en prenant l'espérance dans cette dernière inégalité que

$$u(c(X)) \leq u(c(X)) + \mathbb{E}[(c(X) - X)u'(X)]$$

ce qui implique que

$$c(X) \geq \frac{\mathbb{E}(Xu'(X))}{\mathbb{E}(u'(X))}$$

ceci d'une part mais d'autre part, toujours par concavité,

$$u(c) \leq u(c(X)) + \mathbb{E}[(c - X)u'(X)]$$

ce qui amène à

$$\mathbb{E}[(c - X)u'(X)] \geq 0$$

pour  $c = c(X)$ .

□

**Exemple 1.5.** Soit  $X$  un actif risqué dont le prix aujourd'hui vaut  $\pi$ . Étant donnée une richesse initiale  $w$ , un agent dont la fonction d'utilité  $u$  est dans  $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$  peut investir la fraction  $(1 - \lambda)w$  dans l'actif risqué et le reste  $\lambda w$  dans l'actif sans risque, dont le taux d'intérêt est noté par  $r$ . Son payoff en maturité est alors donné par

$$X_\lambda := \lambda wr + \frac{(1 - \lambda)w}{\pi}(X - \pi). \quad (1.17)$$

D'après la proposition précédente, il n'y a aucun intérêt d'investir dans l'actif sans risque, c-à-d  $\lambda^* = 1$  si et seulement si

$$\mathbb{E}\left(\frac{X - \pi}{\pi}\right) \leq r \quad (1.18)$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{1 + r}\right) \leq \pi. \quad (1.19)$$

En d'autres termes, le prix  $\pi$  aujourd'hui de l'actif risqué doit être supérieur à l'espérance du prix actualisé de cet actif à maturité, donc l'optimum pour l'investisseur est de tout placer en cash.

# Chapitre 2

## Fonctions d'Utilités et Optimisation de Portefeuille

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>2.2</b>	<b>Notations . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>2.3</b>	<b>Le Modèle . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>2.4</b>	<b>Utilité et optimisation de portefeuille . . . . .</b>	<b>64</b>
2.4.1	Exemples de contraintes sur les portefeuilles . .	65
<b>2.5</b>	<b>Méthode EDP . . . . .</b>	<b>67</b>
2.5.1	Hypothèse de recollement des stratégies admissibles	67
2.5.2	Fonction valeur . . . . .	68
<b>2.6</b>	<b>Cadre markovien . . . . .</b>	<b>69</b>
2.6.1	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	69
2.6.2	Modèle à facteur . . . . .	77
<b>2.7</b>	<b>Approche des équations de Bellman par les so-</b>	
	<b>lutions de viscosité . . . . .</b>	<b>79</b>
2.7.1	Définition des solutions de viscosité . . . . .	80
2.7.2	Principe de comparaison . . . . .	82
2.7.3	Programmation dynamique et solutions de viscosité	83
<b>2.8</b>	<b>Utilité et changement de numéraire . . . . .</b>	<b>84</b>

---

## 2.1 Introduction

Un des problèmes les plus étudiés en finance est le problème d'optimisation de portefeuille pour un agent qui investit sur le marché financier et tente de trouver la meilleure stratégie qui maximise l'espérance de l'utilité de son portefeuille final à une date  $T$  appelée maturité.

Ce problème été étudié, pour la première fois et dans le cadre d'un modèle continu, par Merton dans [81], [82], voir aussi [80] et [101] pour un modèle discret. En utilisant des méthodes de programmation dynamique et de contrôle stochastique, ce dernier a établi une équation aux dérivées partielles non linéaire dite équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En particulier, pour des utilités exponentielles, logarithmique et puissance, l'auteur établit des formules fermées pour décrire les solutions à ces équations.

Un premier objectif de ce chapitre sera alors d'explicitier cette méthode, dans le cadre d'un marché financier incomplet dans lequel les cours des actifs sont des semimartingales continues et où un investisseur est contraint de choisir ses portefeuilles dans un ensemble convexe fermé  $\mathcal{K}$ . Nous étudierons un premier cas où les solutions des équations, de type Hamilton-Jacobi-Bellman, sont suffisamment régulières, puis nous introduisons la notion des solutions de viscosité de ces EDP, une notion introduite par Crandall et Lions [12] pour des équations différentielles du premier ordre et généralisées, par la suite, aux équations différentielles du second ordre.

L'objectif final de ce chapitre n'est pas uniquement d'appliquer cette méthode d'équations aux dérivées partielles mais aussi de préparer le terrain pour la partie la plus importante de ce manuscrit où nous considérons le même modèle d'univers d'investissement, avec contraintes  $\mathcal{K}$ , dans un nouveau cadre où les utilités sont stochastiques avec condition initiale. Le même raisonnement appliqué dans ce chapitre, sera par conséquent repris et des EDP stochastiques, très similaires à celles que nous établirons dans les paragraphes qui suivent, seront établies.

## 2.2 Notations

- On considère un processus vectoriel  $\xi$  de dimension  $d$  et dont l'état est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$d\xi_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \quad (2.1)$$

où :

- i)  $b$  est un processus vectoriel à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,
  - ii)  $W$  est un  $m$ -mouvement brownien,
  - iii)  $\sigma$  est une matrice de variance covariance de  $\mathbb{R}^{d \times m}$ ,
- Soit  $w$  une fonction du temps  $t$ , d'une variable réelle  $x$  et du processus  $\xi$  deux fois différentiable par rapport à ces trois variables. Nous notons alors dans toute la suite

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_i w = \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \quad 1 \leq i \leq d \\ w'' &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_t^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \partial_{tx}^2 w &= \partial_{xt}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad \partial_{ij}^2 w = \partial_{ji}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \quad 1 \leq i, j \leq d \\ \partial_{ix}^2 w &= \partial_{xi}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \xi_i}, \quad \partial_{it}^2 w = \partial_{ti}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \xi_i} \quad 1 \leq i \leq d \end{aligned}$$

et  $\mathcal{L}^\xi$  l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L}_t^\xi w = b_t \cdot \nabla_\xi w + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_t \sigma_t' \Delta_\xi w) \quad (2.2)$$

où

- $\nabla_\xi w$  est le gradient de  $w$  en  $\xi$ , défini comme le vecteur colonne de dimension  $N$  donné par  $\nabla_\xi w = (\partial_i w)_{1 \leq i \leq N}$ .
- $\Delta_\xi w$  est la matrice hessienne de  $w$  en  $\xi$  de dimension  $N \times N$ , définie par  $\Delta_\xi w = (\partial_{\xi_i \xi_j}^2 w)_{1 \leq i, j \leq N}$ .
- $\text{tr}$  la fonction qui à toute matrice carrée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  associe sa trace  $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .



- Nous noterons par  $\Delta_{\xi,x}^\sigma$  l'opérateur différentiel suivant

$$\Delta_{\xi,x}^\sigma w = \sum_{i=1}^{i=N} \partial_i w' \sigma^i(t, \xi) \quad (2.3)$$

- Soit  $\mathcal{E}$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$ , nous notons  $\Pi_{\mathcal{E}}$  l'opérateur de projection sur  $\mathcal{E}$ .

## 2.3 Le Modèle

Le modèle, dans ce chapitre, consiste en un marché financier composé de  $d$  actifs risqués  $(\xi^i)_{1 \leq i \leq d}$ , dont les dynamiques sont données par

$$\frac{d\xi_t^i}{\xi_t^i} = b_t^i dt + (\sigma_t^i)^* dW_t, \text{ pour } 1 \leq i \leq d \quad (2.4)$$

et d'actif  $\xi^0$  sans risque qui obéit à la dynamique

$$\frac{d\xi^0}{\xi^0} = r_t dt$$

où  $r$  est le taux court. Le processus  $W = (W_1, W_2, \dots, W_d)$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d$ , défini dans l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour simplifier, on supposera que  $\mathcal{F}_t$  coïncide avec la filtration générée par le mouvement brownien  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ .

**Hypothèse 2.1.** *Les coefficients  $b^i$  et  $\sigma^i$ ,  $i = 1 \dots d$ , sont supposés des processus bornés progressivement mesurables dans l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

**Hypothèse 2.2.** *Notons  $\sigma$  la matrice dont la  $i$ ème colonne correspond au vecteur  $\sigma^i$ ,  $i = 1 \dots d$ . Nous supposons que  $\sigma$  est une matrice non-singulière bornée, d'inverse  $\sigma_t^{-1}(\omega)$  bornée uniformément en  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ .*

Désignons par la suite  $\eta$  la prime de risque ou encore la prime de marché définie par

$$\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t e) \quad (2.5)$$

dont nous supposons qu'elle satisfait la condition

$$\mathbf{E}(\int_0^T ||\eta_t||^2 dt) < +\infty. \quad (2.6)$$

Nous notons aussi  $(H_t^{r,\eta} : t \geq 0)$  et  $(H_{s,t}^{r,\eta} : t \geq s \geq 0)$  les processus définis par

$$\begin{cases} H_t^{r,\eta} = e^{-\int_0^t (r_s + \frac{1}{2} ||\eta_s||^2) ds - \int_0^t \eta_s dW_s} \\ H_{s,t}^{r,\eta} = \frac{H_t^{r,\eta}}{H_s^{r,\eta}} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce processus jouera un rôle très important le long de notre étude. Nous notons en particulier que la martingale locale  $H^{0,\eta}$  est une martingale sous la condition (2.6).

Avant d'écrire la dynamique des richesses dans ce marché, introduisons la notion de portefeuille.

**Définition 2.1.** *Un vecteur  $\pi \in \mathbb{R}^d$  est appelé un processus de portefeuille si  $\pi$  est un processus à valeurs réelles  $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable et satisfait les hypothèses*

$$\int_0^T |(\pi * \sigma) * \eta_t| dt < +\infty \quad (2.8)$$

$$\int_0^T ||\pi_t * \sigma||^2 dt < +\infty \quad (2.9)$$

où  $T$  désigne l'horizon d'investissement.

**Remarque 2.1.** *Si (2.6) est satisfaite ainsi que (2.9) alors ceci implique (2.8). En effet, il suffit d'écrire par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que*

$$\int_0^T |(\pi * \sigma) * \eta_t| dt \leq (\int_0^T ||\pi_t * \sigma||^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T ||\eta_t||^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Dorénavant  $\pi$  désigne un portefeuille satisfaisant les hypothèses de cette définition. En écrivant que  $\pi$  est un vecteur colonne, dont les composantes sont les montants investis dans les actifs

$$(\xi^i)_{1 \leq i \leq d}$$

alors la richesse, à tout instant  $t$  de cet agent est donnée par

$$X_t^\pi = (X_t^\pi - \sum_{i=1..d} \pi_t^i) + \sum_{i=1..d} \pi_t^i \quad (2.10)$$

où  $(X_t^\pi - \sum_{i=1..d} \pi_t^i)$  est la quantité investie dans l'actif  $\xi^0$ .

En appliquant la formule d'Itô à l'identité (2.10), alors l'équation d'autofinancement peut s'écrire, dans un premier temps,

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= X_t^\pi \frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} + \sum_{i=1..d} \pi_t^i \left( \frac{d\xi_t^i}{\xi_t^i} - \frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} \right) \\ &= X_t^\pi r_t dt + \sum_{i=1..d} \pi_t^i ((b_t^i - r_t) dt + \sigma_t^i dW_t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

que nous pouvons réécrire en utilisant la notation  $\sigma$  et l'hypothèse 2.2, et en notant  $x$  le capital initial de l'investisseur comme suit

$$\begin{cases} dX_t^\pi = r_t X_t^\pi dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \\ X_0^\pi = x \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.4 Utilité et optimisation de portefeuille

Dans ce chapitre, nous considérons un agent, de richesse initiale  $x$ , qui investit sur le marché financier, supposé incomplet dans le sens où cet investisseur est contraint de choisir ses stratégies dans un ensemble, noté dans toute la suite par  $\mathcal{K}$ . Comme tout agent financier, cet individu représente ses préférences et son aversion au risque à l'aide d'une fonction d'utilité qu'on notera par  $U$ .

Une fois sur le marché, cet agent, investit sa richesse en achetant et en vendant des quantités d'actifs. Son but est alors de trouver la stratégie optimale qu'il doit adopter le long de la gestion de son portefeuille. Cette stratégie l'amènera à la fin à réaliser une richesse qui lui apporte le plus de satisfaction. Par conséquent, ce portefeuille sera déterminé selon le critère dit de l'utilité espérée, ce qui veut dire que cette stratégie maximise l'espérance de l'utilité de sa richesse finale à la date de maturité  $T$ .

En d'autres termes, le but de l'investisseur est de trouver la stratégie  $\pi^*$  optimale dans le problème d'optimisation de portefeuille suivant :

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \quad (2.13)$$

où

- les portefeuilles issus de  $x$  sont notés  $X_T^{x, \pi}$  si l'agent suit la stratégie  $\pi_t$ ,  $0 < t \leq T$ .
- $\mathcal{A}(x, \mathcal{K})$  désigne l'espace des portefeuilles admissibles, de richesse initiale  $x$ . Nous reviendrons dans la suite à la définition précise de cet ensemble.

### 2.4.1 Exemples de contraintes sur les portefeuilles

Comme il est indiqué ci-dessus, pour un numéraire donné, nous supposons que l'agent est contraint de choisir ses stratégies dans un ensemble  $\mathcal{K}$ , ci-dessus quelques exemples d'espaces de contraintes :

1. Le marché est complet :  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$ , l'investisseur a le libre choix d'investissement.
2. Le marché est incomplet  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^{d-m} \times 0^m$ , l'agent ne peut pas investir que dans les  $(d - m)$  premiers actifs.
3. Le marché est incomplet :  $\mathcal{K}$  est un cône convexe fermé.
4. Le marché est incomplet dans le sens où on a pas le droit d'emprunter de l'argent,  $\mathcal{K} = \{\pi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1..d} \pi_i \leq X^\pi\}$
5. Un second exemple de contrainte sur l'emprunt et qui consiste à ne pas emprunter plus qu'une proportion de la richesse,  $\mathcal{K} = \{\pi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1..d} \pi_i \leq kX^\pi, k > 1\}$
6. Le marché est incomplet dans le sens où l'investisseur est contraint de choisir le montant  $\pi^i$  investi dans le  $i$  ème actif dans un intervalle  $I^i$ ,  $\mathcal{K} = I^1 \times I^2 \times \dots \times I^d$ .

Notons bien que ces espaces sont fixés pour un numéraire donné. Si on change de numéraire, les contraintes bien évidemment doivent être modifiées.

Avant de poursuivre nos investigations, quelques définitions et notations sont nécessaires :

**Définition 2.2.** On dit qu'un portefeuille  $\pi$  est un portefeuille  $\mathcal{K}$ -admissible pour une richesse initiale  $x$  et on écrit  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$  si le processus de richesse  $X^{x, \pi}$  donné par (2.12) pour tout  $t \in [0, T]$  et si

$$\begin{cases} X_t^{x, \pi} \geq 0, & \forall t \in [0, T], \text{ p.s.} \\ \pi_t \in \mathcal{K}, & \forall t \in [0, T], \text{ p.s.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous désignons par

1.  $\mathcal{A}(\mathcal{K})$  l'espace des portefeuilles  $\mathcal{K}$ -admissibles
3.  $\mathcal{A}$  L'espace des portefeuilles admissibles constants ( $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ ).

Si  $x \geq 0$  et  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ , le processus  $H^{r, \eta} X^{x, \pi}$  est une martingale locale positive et donc une sur-martingale. En prenant l'espérance, nous obtenons la contrainte budgétaire

$$\mathbb{E}(H_T^{r, \eta} X_T^{x, \pi}) \leq x. \quad (2.15)$$

**Remarque 2.2.** Si  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ , d'après les hypothèses sur les coefficients du modèle, les processus des richesses  $X^{x, \pi}$  sont bornés dans  $L^2$ , c-à-d

$$\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} \|X_t^{x, \pi}\|^2) < +\infty \text{ p.s.}$$

**Définition 2.3.** Pour toute stratégie de portefeuille  $\pi$ , le vecteur  $\delta(\pi)$ , des proportions investies dans les actifs, est donné par

$$\delta_t(\pi) = \begin{cases} \frac{\pi_t}{X_t^\pi}, & \text{si } X_t^\pi \neq 0 \\ \delta_*, & \text{si } X_t^\pi = 0 \end{cases}$$

où  $\delta_*$  est un vecteur quelconque mais fixé dans  $\mathcal{K}$ .

En particulier, la dynamique (2.12) devient

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\pi}{X_t^\pi} = r_t dt + \delta_t(\pi) \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \\ X_0^\pi = x \end{cases} \quad (2.16)$$

## 2.5 Méthode EDP

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le principe de programmation dynamique dû à Bellman permet de donner une caractérisation de la fonction valeurs en termes d'équations aux dérivées partielles dites de Hamilton-Jacobi-Bellman ainsi qu'un critère pour déterminer la stratégie optimale. Voir "Contrôle Optimal Stochastique et Applications en Finance" par Huyên PHAM [94].

Nous supposons dans toute la suite que l'ensemble  $\mathcal{K}$  des contraintes est un cône convexe fermé. L'avantage de travailler avec des cônes convexes fermés est, bien que l'opérateur de projection sur ces ensembles n'est pas identiquement le projecteur orthogonal, la projection sur un cône possède plusieurs propriétés très utiles dans la suite (voir le lemme B.5 pour les détails). Nous rappelons enfin qu'un cas particulier de cône convexe fermé est le cas où  $\mathcal{K}$  est, tout simplement, un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ , par conséquent la projection sur  $\mathcal{K}$  n'est autre que la projection orthogonale standard.

### 2.5.1 Hypothèse de recollement des stratégies admissibles

Pour pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique quelques hypothèses sont indispensables, notamment l'hypothèse, que nous appellerons hypothèse de *recollement*, suivante :

**Hypothèse 2.3.** *Pour toutes stratégies  $\pi^1$  admissible entre la date 0 et la date  $t_1$  et  $\pi^2$  admissible entre la date  $t_1$  et la date  $t_2$ , la stratégie  $\pi$  associée au vecteur de proportions  $\delta$  défini par  $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$  est une stratégie admissible sur l'intervalle  $[0, t_2]$  et ce quels que soient  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2$ .*

$\delta^1$  et  $\delta^2$  désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies  $\pi^1$  et  $\pi^2$ .

L'intérêt de faire cette hypothèse est essentiellement de pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique (voir le premier chapitre du cours de Saint Flour [20] de Nicole El Karoui) et aussi pour que, à chaque date intermédiaire  $t \in [0, T]$ , nous puissions partir d'une richesse  $x$  quelconque, il suffit de placer à la date 0 la quantité  $xB_{0,t}$  ( $B_{0,t}$  désigne le zéro coupon pour une maturité  $t$ , c-à-d., le prix que nous payons aujourd'hui pour avoir 1 euros en  $t$ ).

Nous remarquons en particulier que si  $\pi$  est la stratégie composée, associée au vecteur de proportion  $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$ , alors la richesse optimale associée vérifie pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$X_t^{x,\pi} = X_t^{t_1, X_{t_1}^{x,\pi^1}, \pi^2}. \quad (2.17)$$

### 2.5.2 Fonction valeur

Commençons par introduire la fonction coût  $J$  définie pour tout  $(t, x, \xi, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$  par

$$J(t, x, \pi) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{t,x,\pi}) / \mathcal{F}_t) \quad (2.18)$$

à laquelle nous associons le programme d'optimisation suivant

$$v(t, x) = \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} J(t, x, \pi) \quad (2.19)$$

Dans la littérature la fonction  $v$  définie ci-dessus est appelée *fonction valeur*. Comme la fonction d'utilité  $U$  est une fonction strictement concave croissante, il est, alors, naturel de se demander si cette fonction valeur  $v$  possède les mêmes propriétés que  $U$ . Nous considérons par conséquent deux réels  $x$  et  $x' : x > x'$  et  $\pi$  une stratégie admissible quelconque. Notons  $X^{x,\pi}$  et  $X^{x',\pi}$  les richesses issues de  $x$  et  $x'$  de même stratégie  $\pi$ . Nous pouvons alors écrire que  $X^{x,\hat{\pi}} = X^{x',\hat{\pi}} + X^{x-x',\hat{\pi}}$ , en remarquant que  $x - x' > 0$  et que par définition 2.2 équation (2.14)  $\hat{\pi}$  est une stratégie admissible implique  $X^{x-x',\hat{\pi}} \geq 0$ , il s'en suit par monotonie de  $U$  que

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x,\pi}) / \mathcal{F}_t) \geq \mathbb{E}(U(T, X_T^{x',\hat{\pi}} + X_T^{x-x',\hat{\pi}}) / \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbb{E}(U(T, X_T^{x',\hat{\pi}}) / \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute stratégie admissible  $\hat{\pi}$ , en prenant le supremum à droite de cette inégalité, nous montrons que  $v$  est croissante.

Nous nous intéressons maintenant à la concavité de la fonction valeur. Rappelons d'abord que, comme  $U$  est strictement concave, pour toutes stratégies

admissibles  $\pi^1$  et  $\pi^2$  et pour toutes richesses initiales  $x^1$  et  $x^2$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  nous avons l'inégalité suivante,

$$U(T, \lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}) > \lambda U(T, X_T^{x^1, \pi^1}) + (1 - \lambda) U(T, X_T^{x^2, \pi^2}) \quad (2.20)$$

Pour pouvoir conclure il suffit de prouver que la richesse  $\lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}$  est une richesse admissible. Pour cela nous notons  $x_\lambda = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$ ,  $\pi^\lambda = \lambda \pi^1 + (1 - \lambda) \pi^2$  et  $X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda} = \lambda X_T^{x^1, \pi^1} + (1 - \lambda) X_T^{x^2, \pi^2}$ . Comme l'ensemble des stratégies admissibles est un ensemble convexe il s'en suit que  $\pi^\lambda$  est une stratégie admissible et par la suite la richesse  $X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda}$  est une richesse atteignable issue du capital initiale  $x_\lambda$ . En prenant le supremum sur toutes les stratégies  $\pi^1$  et  $\pi^2$  dans (2.20), il s'en suit

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{\pi^\lambda \in \mathcal{A}(x_\lambda, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x_\lambda, \pi^\lambda}) / \mathcal{F}_t) &> \lambda \text{ess sup}_{\pi^1 \in \mathcal{A}(x^1, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x^1, \pi^1}) / \mathcal{F}_t) \\ &+ (1 - \lambda) \text{ess sup}_{\pi^2 \in \mathcal{A}(x^2, \mathcal{K})} \mathbb{E}(U(T, X_T^{x^2, \pi^2}) / \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

ou encore,

$$v(t, x_\lambda) = v(t, \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) > v(t, x^1) + (1 - \lambda) v(t, x^2), \quad \lambda \in ]0, 1[$$

ce qui prouve que  $v$  est strictement convexe. Pour récapituler, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *La fonction valeur  $v$ , du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) et croissante strictement concave.*

La régularité de  $v$  ne peut être démontrer en raisonnant uniquement en terme de la fonction d'utilité  $U$ , comme nous l'avons fait pour la monotonie et la concavité. En effet nous verrons dans les paragraphes qui suivent qu'en général  $v$  n'est pas régulière. Par contre, sous certaines conditions, nous montrons, dans le chapitre 3, la continuité et la dérivabilité de  $v$ .

## 2.6 Cadre markovien

### 2.6.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas markovien où nous supposons que tous les paramètres du modèle sont des fonctions du *temps* et de l'état du



système, c-à-d nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite.

**Hypothèse 2.4.** *Les paramètres du modèle,  $b^i$ ,  $\sigma^i$ ,  $i = 1..d$  sont des fonctions mesurables régulières de  $[0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  (respectivement de  $[0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ).*

Dans toute la suite et dans ce cadre Markovien, nous supposons que  $v$  est une fonction du temps  $t$  de la richesse  $x$  et du cours des actifs  $\xi$ . Nous rappelons enfin que la solution du problème d'optimisation de portefeuille (2.13) est égale à  $v(0, x, \xi)$ .

Le but dans la suite est alors de montrer l'existence d'une stratégie optimale admissible que nous noterons par  $\pi^*$ . Dans le cas où cette stratégie peut être exprimée comme une fonction mesurable du temps et de l'état du système,  $\pi^*$  est appelée un contrôle optimal Markovien pour (2.19).

Comme il est déjà indiqué le problème que nous considérons ici est un problème à horizon fini  $T$ . Soit alors  $0 < h < T - t$ , et supposons que nous suivons la stratégie  $\pi$  dans l'intervalle  $[t, t + h]$ . À l'instant  $t + h$ , l'état du système est alors  $X_{t+h}^{t,x,\pi}$  et nous l'observons cette date. Supposons de plus qu'à partir de  $t + h$ , la politique optimale  $\pi_s^*$ ,  $t + h \leq s \leq T$  est connue et notons  $\tilde{\pi}$  la stratégie définie entre  $t$  et  $T$  par  $\tilde{\pi} = \pi \mathbb{1}_{[t, t+h]} + \mathbb{1}_{[t+h, T]}$ . Le principe de Bellman dit que, si l'on choisit  $\pi_s$  sur  $[t, t + h]$  de façon à maximiser l'expression  $J(t, x, \xi, \tilde{\pi})$ , on obtient ainsi le contrôle  $\pi^*$  optimal sur la période  $[t, t + h]$ . Ceci signifie que le contrôle optimal sur  $[t, T]$  peut être décomposé en  $\pi_s^*$ ,  $s \in [t, t + h]$ , et  $\pi_s^*$ ,  $s \in [t + h, T]$ , cette dernière étant la politique optimale démarrant en  $t + h$  dans l'état  $X_{t+h}^{t,x,\pi^*}$ . Ceci n'est pas si évident sans l'hypothèse 2.3. Par la loi des espérances conditionnelles itérées et par l'hypothèse 2.3.

$$\begin{aligned} v(t + h, x, \xi) &= J(t + h, x, \xi, \pi^*) \\ &= \mathbf{E}(U(T, X_T^{t,x,\pi^*}) / \mathcal{F}_{t+h}) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Considérons la stratégie :

$$\tilde{\pi} = \begin{cases} \pi_s, & t \leq s \leq t + h \\ \pi_s^*, & t + h \leq s \leq T \end{cases}$$

D'après l'hypothèse 2.3 ci-dessus, cette stratégie est encore une stratégie admissible et par conséquent nous pouvons écrire que

$$J(t, x, \xi, \tilde{\pi}) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{t,x,\tilde{\pi}})/\mathcal{F}_t) \quad (2.22)$$

En utilisant par la suite l'identité (2.17), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} J(t, x, \xi, \tilde{\pi}) &= \mathbf{E}(U(T, X_T^{t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \pi^*})/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(U(T, X_T^{t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \pi^*})/\mathcal{F}_{t+h})/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(J(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi, \pi^*)/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nous avons donc :

$$v(t, x, \xi) = \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h}) \quad (2.24)$$

Nous dérivons maintenant, d'une manière formelle, l'équation de la programmation dynamique obtenue à partir de (2.24). Considérons la stratégie constante  $\pi_s = \pi \in \mathcal{A}$  sur  $[t, t+h]$ .  $\mathcal{A}$  étant l'ensemble des stratégies admissibles constante de  $\mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ . Alors d'après (2.24), on a :

$$v(t, x, \xi) \geq \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi)/\mathcal{F}_{t+h})$$

Si nous faisons maintenant l'hypothèse suivante

**Hypothèse 2.5.** *La fonction valeur  $v$  est dans la classe  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$*

alors en appliquant le formule d'Itô entre la date  $t$  et  $t+h$ , il est facile d'écrire

$$\begin{aligned} v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi) &= v(t, x, \xi) + \int_t^{t+h} [\partial_t v + \mathcal{L}^{\xi, X^{x,\pi}} v] ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \left[ v' \pi \sigma_s + \sum_{i=1}^{i=d} v_i \xi_s^i \sigma_s^i \right] dW_s \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\mathcal{L}^{\xi, X}$  est l'opérateur défini dans (2.2) par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{\xi, X^\pi} w &= b(t, \xi) \cdot \nabla_\xi w + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, \xi) \sigma'(t, \xi) \Delta_\xi w) + r_t x w' \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\pi \sigma\|^2 w'' + \langle \Delta_{\xi, x}^\sigma w, \pi \sigma \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

et  $\Delta_{\xi,x}^\sigma$  est l'opérateur donné dans (2.3) par :

$$\Delta_{\xi,x}^\sigma w = \sum_{i=1}^{i=d} \partial_{\xi^i} w' \sigma^i(t, \xi). \quad (2.27)$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , il s'en suit l'identité :

$$\mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \xi) / \mathcal{F}_t) = v(t, x, \xi) + \mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} \left[\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v\right] ds / \mathcal{F}_t\right) \quad (2.28)$$

d'où en substituant dans (2.24) :

$$\mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} \left[\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v\right] ds / \mathcal{F}_t\right) \leq 0 \quad (2.29)$$

Vu les hypothèses de régularités portées sur  $v$  et les paramètres du modèle, nous pouvons diviser par  $h$  et le faire tendre  $h$  vers 0, nous obtenons par conséquent,

$$\partial_t v + \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v \leq 0 \quad (2.30)$$

Ceci étant valable quel que soit  $a \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ , il s'en suit,

$$\partial_t v + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v \leq 0$$

Si de plus, nous supposons que  $\pi^*$  est une stratégie optimale. Alors (2.24) est simplement :

$$v(t, x, \xi) = \mathbf{E}(v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi^*}, \xi) / \mathcal{F}_{t+h}) \quad (2.31)$$

Par des arguments similaires et avec des conditions de régularités sur  $v$ , nous obtenons l'égalité suivante :

$$\partial_t v(t, x, \xi) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_t^{\xi, X^{x,\pi}} v(t, x, \xi) = 0. \quad (2.32)$$

Soit  $(t, x, \xi, \pi, u, p, w) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

Notons  $\mathcal{P}$  l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w) = \frac{1}{2} \|\pi \sigma\|^2 w + \langle \pi \sigma, \eta u + p \rangle \quad (2.33)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ .

Écrivons que

$$\mathcal{L}_t^{\xi, X^{x, \pi}} v = \mathcal{L}_t^\xi v + r_t x v' + P(t, x, \xi, \pi, v, \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'')$$

et injectons ceci dans l'équation (2.32). Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** *Si  $v$  est la fonction valeur du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) satisfait l'hypothèse 2.5 de régularité, alors  $v$  est solution de l'équation de HJB suivante :*

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x, \xi) &+ \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + r_t x v'(t, x, \xi) \\ &+ \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, v, \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec comme condition terminale  $v(T, x, \xi) = U(T, x)$  pour tout  $x$ .

Nous réécrivons souvent ce théorème sous forme :

**Corollaire 2.1.** *La fonction valeur  $v$  du problème d'optimisation de portefeuille défini dans (2.19) satisfait l'hypothèse 2.5 de régularité, alors  $v$  est solution de l'équation de HJB suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + r_t x v'(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \\ v(T, x, \xi) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.35)$$

où pour  $(t, x, \xi, u, p, w) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{H}(t, x, \xi, u, p, w) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w). \quad (2.36)$$

Cet opérateur  $\mathbf{H}$  est appelé hamiltonien du problème de contrôle considéré.

L'équation (2.35) est alors appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

**Remarque 2.3.** *Lorsque l'ensemble des stratégies (contrôles) est réduit à un élément  $\pi$ , l'équation d'HJB se réduit à une EDP linéaire :*

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x, \xi) &+ \mathcal{L}_t^\xi v(t, x, \xi) + r_t x v'(t, x, \xi) + P(t, x, \xi, \pi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0 \\ v(T, x, \xi) &= U(T, x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

correspondant à la fonction valeur :

$$v(t, x, \xi) = \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \quad (2.38)$$

C'est la représentation de Feynman-Kac du problème de Cauchy.

Dans le cas contraire (l'ensemble des contrôles n'est pas réduit à un singleton) nous montrons que l'EDP vérifiée par la fonction valeur est une EDP non linéaire. En effet,

**Proposition 2.1.** *L'hamiltonien  $\mathbf{H}$  du corollaire 2.1, équation (2.36), est donné par*

$$\mathbf{H}(t, x, \xi, u, p, w) = -\frac{1}{2w} \left\| \prod_{\kappa_\sigma} [\eta_t u + p] \right\|^2. \quad (2.39)$$

*Démonstration.*

L'idée de cette démonstration consiste à montrer que le maximum dans (2.36) est atteint en un processus optimal que nous expliciterons.

Le problème d'optimisation de portefeuille qui nous intéresse est alors, d'après le corollaire précédent, le suivant

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, u, p, w) = \frac{1}{2} \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 w + \langle \pi_t \sigma_t, \eta_t u + p \rangle \quad (2.40)$$

Nous commençons d'abord par écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, v', v'', \Delta_{\xi, x}^\sigma v) &= \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 v'' + \langle \pi_t \sigma_t, v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v \rangle \\ &= \frac{1}{2} v'' \left\| \pi_t \sigma_t + \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 - \frac{1}{2} v'' \left\| \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{K}} \left( \frac{1}{2} \left\| \pi_t \sigma_t \right\|^2 v'' + 2 \langle \pi_t \sigma_t, v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} v'' \left\| \frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right\|^2 + \frac{1}{2} v'' \inf_{\pi \in \mathcal{K}} \left\| \left( -\frac{v' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma v}{v''} \right) - \pi_t \sigma_t \right\|^2. \end{aligned}$$

Le passage du sup à l'inf est uniquement dû au théorème 2.1, où nous avons montré la stricte concavité de  $v$  ( $v'' < 0$ ). Enfin pour conclure, il suffit juste de remarquer que le terme en inf, n'est autre que la définition même de la distance

de  $\frac{-v'\eta + \Delta_{\xi,x}^\sigma v}{v''}$  à l'ensemble convexe  $\mathcal{A}\sigma = \mathcal{K}\sigma$ . D'après les résultats du lemme B.5, nous rappelons que l'inf est atteint en un unique point (stratégie optimale) de  $\mathbb{R}^d$  que nous noterons

$$\pi_t^*(x) = \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left( - \frac{v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v}{v''} \right) (t, x).$$

Par la suite,  $-v'' > 0$  et comme  $\mathcal{K}\sigma$  est un cône il est donc positivement homogène d'après lemme assertion (a3), il s'en suit que

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left( v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, x)$$

Il suffit par la suite d'injecter cette identité dans (2.33) pour conclure.

□

D'après ce dernier résultat, la proposition suivante est immédiate

**Proposition 2.2.**

*Si la fonction valeur  $v$  du problème d'optimisation de portefeuille (2.19) est dans la classe  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ , alors*

(i)  *$v$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} (\partial_t v + \mathcal{L}_t^\xi v + r_t x v')(t, x, \xi_t) - \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}\sigma} [\eta_t v' + \Delta_{\xi,x}^\sigma v] \right\|^2(t, x, \xi_t) = 0 \\ v(T, x, \xi) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.41)$$

(ii) *La stratégie optimale, est donnée par*

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left( v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, x). \quad (2.42)$$

(iii) *La richesse optimale que nous noterons par  $X^{x,*}$  obéit à la dynamique suivante*

$$\begin{cases} dX_t^{x,*} = r_t X_t^{x,*} ds - \frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}\sigma} \left( v'\eta_t + \Delta_{\xi,x}^\sigma v \right) (t, X_t^{x,*}) (dW_t + \eta_t dt) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0^{x,*} = x. \end{cases}$$

**Remarque 2.4.** *Il est important de rappeler que la stricte concavité de  $v$  a jouer un rôle très important pour établir ce résultat, car, dans le cas contraire, l'Hamiltonien  $\mathbf{H}$  peut exploser.*

À ce stade, nous avons supposé que la fonction valeur est suffisamment régulière pour pouvoir appliquer le lemme d'Itô et établir l'équation de HJB (2.41) que doit satisfaire  $v$ . En pratique l'approche est un peu différente, car nous ne pouvons montrer en général cette propriété de régularité. L'idée est de procéder par vérification dans le sens suivant : supposons qu'il existe une solution  $w$  régulière de l'équation (2.41), alors sous quelles hypothèses cette fonction  $w$  coïncide-t-elle avec la fonction valeur  $v$  ?

Le résultat qui nous permet de déduire l'égalité entre ces deux fonctions  $w$  et  $v$  est appelé le théorème de vérification et dont voici une version, adaptée au problème que nous étudions.

**Théorème 2.3.** *Soit  $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d))$ , à croissance quadratique c'est à dire qu'il existe une constante  $k > 0$  tel que*

$$|w(t, x, \xi)| \leq k(1 + |x|^2), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (2.43)$$

(a) *Si  $w$  satisfait  $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} (\partial_t w + \mathcal{L}^\xi w + r_t x w')(t, x, \xi_t) + \sup_{\pi \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(t, x, \xi, \pi, w', w'', \Delta_{\xi, x}^\sigma w) \leq 0 \\ w(T, x, \xi) \leq U(T, x) \end{cases} \quad (2.44)$$

*alors  $w \leq v$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ .*

(b) *Si de plus  $w(T, \cdot) = U(T, \cdot)$  et il existe une stratégie  $\pi^*$  telle que les inégalités (2.44) sont des égalités et telle que l'EDS*

$$dX_t^{\pi^*} = r_t X_t^{\pi^*} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \quad (2.45)$$

*admet une solution, alors  $w = v$ .*

Une version plus générale de ce théorème ainsi qu'une démonstration sont données au paragraphe 3.5 dans [94]. Une conséquence directe de ce théorème de vérification est donnée dans le résultat suivant.

**Théorème 2.4.** *Si  $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d))$  est solution de (2.41), alors cette solution est unique.*

### 2.6.2 Modèle à facteur

Motivés par le fait qu'en réalité les paramètres du modèle sont très sensibles aux informations disponibles sur le marché, nous allons supposer, toujours dans le cadre markovien, que les paramètres de diffusions des actifs :  $b^i, \sigma^i$ ,  $i = 1..d$  dépendent, outre les cours des actifs, d'un ensemble de facteurs supplémentaires. La question est alors la suivante :

Sachant qu'on n'investit pas dans ces processus, comment la fonction valeur, d'un investisseur, peut-elle être modifiée ?

Comment faut-il tenir compte de ces informations dans la description de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ?

Sans perte de généralité, nous supposons, pour simplifier, que le nouveau facteur  $\zeta$  est un processus dans  $\mathbb{R}$ , les calculs étant identiques dans le cas vectoriel. Nous supposons de plus que

**Hypothèse 2.6.**  $\zeta$  suit la dynamique :

$$\frac{d\zeta_t}{\zeta_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t. \quad (2.46)$$

Désignons par  $\bar{\xi}$  le vecteur  $((\xi^i)_{i=1..d}, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$  et par  $\bar{\sigma}$  la matrice variance covariance donnée par  $\bar{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} ((\sigma^i)_{i=1..d}, \gamma)$ .

Toujours dans le cadre markovien, nous supposons que la fonction valeur  $v$  est une fonction du temps  $t$ ,  $x$  et  $\bar{\xi}$ ,

L'idée, comme nous l'avons expliqué, est de considérer des nouveaux facteurs dans le modèle, sans toutefois les considérer comme des actifs c-à-d on n'y investit pas de l'argent. Ainsi le nombre d'actifs ne change pas, ni les paramètres du marché :

$$(r, \eta).$$

Nous remarquons, de même, que l'équation de la dynamique des richesses (2.12) est à son tour invariante.

Supposons que  $v$  satisfait la nouvelle hypothèse de régularité suivante.

**Hypothèse 2.7.** La fonction valeur  $v$  est dans la classe  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1})$ .



Alors en appliquant la formule d'Itô entre  $t$  et  $t+h$  à  $v(s, X_s^{t,x,a}, \bar{\xi}_s)$ , l'équation (2.25) est remplacée par :

$$\begin{aligned} v(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}, \bar{\xi}_{t+h}) &= v(t, x, \bar{\xi}) + \int_t^{t+h} \left[ \partial_t v + \mathcal{L}_s^{\bar{\xi}, X^{x,\pi}} v \right] ds \\ &+ \int_t^{t+h} [v' \pi_s \sigma_s + \langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma}_s \rangle] dW_s \end{aligned} \quad (2.47)$$

où nous rappelons que  $\nabla_{\bar{\xi}}$  n'est autre que le gradient de  $v$  en  $\bar{\xi}$  et par conséquent  $\langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma}_s \rangle = \sum_{i=1}^{d+1} v_i \bar{\xi}_s^i \sigma_s^i$ .

Nous voyons, clairement que l'équation (2.47) est très analogue à (2.25). Il suffit de remplacer  $\mathcal{L}_s^{\xi, X^{x,\pi}}$  par  $\mathcal{L}_s^{\bar{\xi}, X^{x,\pi}}$  et  $\langle \nabla_{\xi}, \sigma \rangle$  par  $\langle \nabla_{\bar{\xi}}, \bar{\sigma} \rangle$ , dans (2.25) pour obtenir (2.47).

En se basant sur cette analogie, nous pouvons donc déduire de la proposition 2.2, sans faire de calcul, le résultat suivant.

**Proposition 2.3.**

Si  $v(t, \cdot)$  est la fonction valeur du problème d'optimisation de portefeuille, définie dans (2.19) est dans la classe  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1})$ , alors

(i) Elle est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathcal{L}_t^{\bar{\xi}} v + r_t x v' - \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\kappa\sigma} [\eta_t v' + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} v] \right\|^2 = 0 \\ v(T, x, \bar{\xi}) = U(T, x) \end{cases} \quad (2.48)$$

(ii) La stratégie optimale, est donnée par

$$\bar{\pi}_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\kappa\sigma} \left( u' \eta_t + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} u \right) (t, x). \quad (2.49)$$

(iii) La richesse optimale que nous noterons  $\bar{X}^{x,*}$  obéit à la dynamique suivante

$$\begin{cases} d\bar{X}_t^{x,*} = r_t \bar{X}_t^{x,*} dt - \frac{1}{u''} \prod_{\kappa\sigma} \left( u' \eta_t + \Delta_{\bar{\xi}, x}^{\bar{\sigma}} u \right) (t, \bar{X}_t^{x,*}) (dW_t + \eta_t dt) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ \bar{X}_0^{x,*} = x. \end{cases}$$

## 2.7. Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

---

**Remarque 2.5.** *Dans le cadre de ce paragraphe, nous voyons bien que  $\zeta$  peut être interprété comme un  $(d+1)$ ème actif, et le fait de ne pas investir en cet actif revient à considérer des nouvelles stratégies  $\bar{\pi} = (\pi, \bar{\pi}^d = 0) \in \bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ .*

*Par contre, le fait que nous n'investissons pas dans cet actif apparaît au niveau du projecteur  $\prod_{\mathcal{K}_\sigma}$ , où nous n'avons pas remplacer  $\sigma$  par  $\bar{\sigma}$ , contrairement aux deux opérateurs  $\mathcal{L}^{\bar{\xi}}$  et  $\Delta_{\bar{\xi},x}^{\bar{\sigma}}$  où nous avons fait les remplacements nécessaires, car c'est à ce niveau qu'apparaît l'impact d'une nouvelle information  $\zeta$  sur la fonction valeur  $v$ . Cet impact est mesuré en terme de dérivée de  $v$  par rapport à cette variable.*

À partir de cette remarque, tous les résultats du paragraphe précédent 2.5 peuvent alors être généralisés dans le contexte de cette section.

## 2.7 Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment le principe de programmation dynamique permet d'étudier le problème d'optimisation de portefeuilles. Ce principe est un outil très puissant mais, dans son approche, il suppose a priori que la fonction valeur soit suffisamment régulière, ce qui n'est pas forcément toujours vrai.

Une méthode plus générale est donc nécessaire, cette méthode est la méthode des solutions de viscosité introduite au début par Crandall et Lions [12] pour des équations différentielles du premier ordre. Cette méthode a été, par la suite, généralisée aux équations différentielles du second ordre, et c'est plutôt ces dernières qui nous intéressent dans notre étude.

Ce paragraphe sera alors consacré à l'introduction de la notion de solutions de viscosité, et aux outils nécessaires pour aborder les problèmes de contrôle stochastique de manière générale, notamment la notion de sursolution (sous-solution) de viscosité et le principe de comparaison pour des équations aux

dérivés partielles non-linéaire du second ordre, s'écrivant sous la forme,

$$F(t, y, u(t, y), \partial_t u(t, y), u'(t, y), u''(t, y)) = 0, \quad (t, y) \in [0, T] \times \mathcal{I} \quad (2.50)$$

où  $\mathcal{I}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , et  $u'$  (respectivement  $u''$ ) est le gradient (respectivement la matrice jacobienne) de  $u$  par rapport à  $y$ .

Dans le problème qui nous intéresse, il faut comprendre un point  $y$  de  $\mathbb{R}^{d+1}$  comme un vecteur dont la première composante est la richesse  $x$  et les  $d$  dernières composantes coïncident avec celle du cours des actifs  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Nous donnerons, dans un premier temps, les définitions et les premiers résultats de manière générale, et ce pour rappeler le principe de cette approche. Nous reviendrons par la suite au cadre précis qui nous intéresse, c-à-d le cas des équations de HJB étudiées dans le paragraphe précédent correspond à :

$$-F(t, (x, \xi), u, v, p, w) = v + r_i p_1 + \mathcal{L}^\xi u + \mathbf{H}(t, (x, \xi), p_1, (p_i)_{i=2}^{d+1} \sigma, w_{11}) \quad (2.51)$$

Le signe moins que nous rajoutons devant  $F$  ne change en aucun cas ni la nature du problème ni les résultats, mais sert uniquement à ce que  $F$ , ainsi définie, vérifie les conditions d'ellipticité et de parabolicité dans la suite. Les résultats que nous énoncerons sont démontrés rigoureusement par Huyên Pham dans le chapitre 4 de son livre [94] .

### 2.7.1 Définition des solutions de viscosité

Nous supposons que la fonction  $F$  ci-dessus est une fonction continue de  $[0, T] \times \mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathcal{M}_{d+1}$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $\mathcal{M}_{d+1}$  est l'ensemble des matrices carrées de dimension  $d + 1$ .

Nous supposons de plus que cette fonction satisfait les deux conditions de parabolicité et d'ellipticité suivantes :

#### Condition de parabolicité

$F$  satisfait la Condition de parabolicité, si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathcal{I}$   $u \in \mathbb{R}$   $v \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^{d+1}$  ,  $w, w' \in \mathcal{M}_{d+1}$ ,

$$w \leq w' \Rightarrow F(t, y, u, v, p, w) \geq F(t, y, u, v, p, w').$$

#### Condition d'ellipticité

## 2.7. Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

---

$F$  satisfait la Condition d'ellipticité, si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathcal{I}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v, v' \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $w \in \mathcal{M}_{d+1}$ ,

$$v \leq v' \Rightarrow F(t, y, u, v, p, w) \geq F(t, y, u, v', p, w).$$

**Remarque 2.6.** Dans le cadre qui nous intéresse, il est facile de vérifier que la condition de parabolicité est satisfaite pour  $F$ . En remarquant la propriété suivante, de l'opérateur de projection sur un cône :

$$v \leq v' \Rightarrow \left\| \prod_{\mathcal{K}_\sigma} (v + a) \right\| \geq \left\| \prod_{\mathcal{K}_\sigma} (v' + a) \right\|, \forall a \in \mathbb{R}^d$$

alors la condition d'ellipticité est aussi facilement vérifiée.

**Définition 2.4.** Soit  $v$  une fonction localement bornée de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathbb{R}$  (c-à-d pour tout voisinage de  $y \in \mathcal{I}$  il existe un voisinage compact  $U(y)$  tel que  $v$  soit bornée sur ce voisinage, on définit alors

- son enveloppe semicontinue supérieure (la plus petite fonction semicontinue supérieurement (s.c.s) majorant  $v$  sur  $\mathcal{I}$ )  $v^* : \bar{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$ , par :

$$v^*(a) = \limsup_{x \rightarrow a} v(x)$$

- son enveloppe semicontinue inférieure  $v_*$  (la plus grande fonction semicontinue inférieurement (s.c.i) minorant  $v$  sur  $\mathcal{I}$ ) par,

$$v_*(a) = \liminf_{y \rightarrow a} v(y)$$

**Remarque 2.7.** Notons qu'une fonction  $v$  localement bornée sur  $\mathcal{I}$  est

- semicontinue supérieurement (respectivement inférieurement) si et seulement si  $v = v^*$  (respectivement  $v = v_*$ ) sur  $\mathcal{I}$ .
- est continue si et seulement si elle est à la fois semicontinue supérieurement et semicontinue inférieurement, c-à-d  $v = v^* = v_*$  sur  $\mathcal{I}$ .

**Définition 2.5.** Soit  $v : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement bornée,

- (1) On dit que  $v$  est une sursolution de viscosité (discontinue) de (2.50) si

$$F(t, y_{\min}, v_*, \partial_t \phi(y_{\min}), \phi'(y_{\min}), \phi''(y_{\min})) \geq 0$$

pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$  et pour tout  $y_{\min} \in \mathcal{I}$  tel que  $y_{\min}$  est un minimum local de  $v_* - \phi$ .

(2) On dit que  $v$  est une sous-solution de viscosité (discontinue) de (2.50)

$$F(t, y_{\max}, v^*, \partial_t \phi(y_{\max}), \phi'(y_{\max}), \phi''(y_{\max})) \leq 0$$

pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$  et pour tout  $y_{\max} \in \mathcal{I}$  tel que  $y_{\max}$  est un maximum local de  $v^* - \phi$ .

(3) On dit que  $v$  est une solution de viscosité (discontinue) de (2.50) si et seulement si elle est à la fois une sursolution et une sous-solution de viscosité de (2.50).

**Remarque 2.8.** Si  $v$  est une sursolution (respectivement sous-solution) de viscosité de (2.50) alors  $v_*$  (respectivement  $v^*$ ) est une sursolution (s.c.i) (respectivement sous-solution (s.c.s)) de viscosité de (2.50).

En particulier d'après la remarque 2.7, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** Soit  $v \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{I})$ . Alors  $v$  est une sursolution (respectivement sous-solution) de viscosité de (2.50) si et seulement si  $v$  est une sursolution (respectivement sous-solution) classique de (2.50).

## 2.7.2 Principe de comparaison

Une des questions fondamentales que nous pouvons nous poser à ce niveau est la suivante :

Supposons qu'il existe une solution de viscosité de (2.50), étant données des conditions aux bords, cette solution est-elle unique ?

Comme pour les principes de comparaison classiques (pour les solutions régulières), il existe un principe de comparaison dit fort qui permet de comparer une sous-solution de viscosité de (2.50) et une sursolution de viscosité à partir de leur comparaison sur le bord du domaine  $\mathcal{I}$  noté par  $\partial\mathcal{I}$ . Ce principe est le suivant :

Si  $v$  est une sous-solution de viscosité s.c.s. de (2.50) et  $u$  une sursolution s.c.i. de viscosité de (2.50) telle que  $v^* \leq u_*$  sur  $\partial\mathcal{I}$  alors

$$v \leq u \text{ sur } \bar{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I} \cup \partial\mathcal{I}.$$

Un des résultats immédiats de ce principe de comparaison est le lemme suivant.

## 2.7. Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité

---

**Lemme 2.1.** *Considérons l'EDP (2.50) avec une condition au bord  $f$ , alors s'il existe une solution (de viscosité)  $v$  vérifiant  $v = f$  sur le bord  $\partial\mathcal{I}$  alors elle est unique.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe deux solutions de viscosité  $u$  et  $v$  de (2.50) avec la même condition au bord, alors on aura à la fois  $v^* \leq u_*$  et  $u^* \leq v_*$  sur  $\partial\mathcal{I}$ , en appliquant le principe de comparaison fort on obtient :

$$v^* \leq u_* \text{ et } u^* \leq v_* \text{ sur } \mathcal{I}$$

Ceci d'une part, mais d'autre part par définition  $v_* \leq v^*$  et  $u_* \leq u^*$ , en combinant avec ce qui précède on déduit les égalités suivantes :

$$v_* = v^* = u_* = u^* \text{ sur } \mathcal{I}$$

ce qui est équivalent à  $u = v$  sur  $\mathcal{I}$ , mais aussi  $u = u^* = u_*$  d'où la continuité de la solution sur  $\mathcal{I}$ . □

**Remarque 2.9.** *Il est très évident que ce principe de comparaison fort est un outil très puissant qui permet de montrer l'unicité, la continuité et de comparer une sous-solution et une sursolution. Mais il faut faire attention quant à son application et surtout dans le cadre où  $\partial\mathcal{O} = \emptyset$  qui nécessite des conditions supplémentaires. Mais ceci n'est pas notre cas car à la date de maturité  $T$  la fonction valeur est donnée.*

### 2.7.3 Programmation dynamique et solutions de viscosité

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre du problème d'optimisation qui nous intéresse, c-à-d le problème (2.19). Nous donnerons les principaux résultats qui montrent comment le principe de la programmation dynamique, sous certaines hypothèses faibles sur la régularité de la fonction valeur  $v$  (2.19), nous permet encore une fois de montrer que cette fonction valeur est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman au sens de la viscosité. Nous ne démontrons pas les résultats dans cette section, toutes les preuves rigoureuses sont fournies dans le paragraphe 4.4 de [94].

Pour cela nous commençons par le premier résultat.

**Proposition 2.5.** *Supposons que la fonction valeur  $v$  est localement bornée sur le domaine  $[0, T[ \times \mathcal{I}$ , alors  $v$  est une sous-solution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

**Proposition 2.6.** *Supposons que la fonction valeur  $v$  est localement bornée sur le domaine  $[0, T[ \times \mathcal{I}$ , alors  $v$  est une sursolution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

Nous notons que la démonstration de ce dernier résultat est légèrement différente de celle de la proposition qui précède, car elle n'est obtenue que sous une condition supplémentaire qui tient compte du fait que le hamiltonien  $\mathbf{H}$  peut exploser, très particulièrement lorsque l'ensemble des stratégies admissibles est non-borné. Or nous avons montré dans la section 2.5 que l'opérateur à maximiser  $\mathcal{P}$  (donnée par 2.33) est strictement convexe en  $\pi$ , vu la stricte convexité de la fonction d'utilité  $U$  et par conséquent celle de  $v$  (théorème 2.20), ce qui a induit que l'hamiltonien dans le problème, défini dans 2.36, est fini. C'est pour cette raison que l'énoncé de cette dernière proposition est différent de celui de la proposition 4.4.3 dans [94].

En combinant les deux derniers résultats, nous avons alors le résultat général suivant.

**Théorème 2.5.** *Supposons que la fonction valeur  $v$  est localement bornée sur le domaine  $[0, T[ \times \mathcal{I}$ , alors  $v$  est une solution de viscosité de (2.35) c-à-d*

$$\partial_t v(t, x) + q_t x v'(t, x, \cdot) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', \Delta_{\xi, x}^\sigma v, v'') = 0.$$

## 2.8 Utilité et changement de numéraire

Avant d'exposer l'idée générale de ce travail, rappelons la définition d'un numéraire.

**Définition 2.6.** *Un numéraire est une référence monétaire, c-à-d un processus d'Itô continu, adapté et strictement positif.*

Le but de ce paragraphe est le suivant : nous supposons que l'agent veut investir dans un second marché  $\mathcal{M}^Y$  dont le numéraire est noté par  $(Y_t)_{t \geq 0}$  (par exemple  $Y$  peut représenter le taux de change Euros/Dollars). Par conséquent, il va redéfinir son portefeuille et tentera naturellement, comme dans le cadre du marché initial, de trouver la meilleure stratégie qu'il doit suivre. A ce stade, et afin de trouver le critère d'optimalité dans ce nouveau marché financier, l'agent doit répondre aux questions suivantes :

- Dans ce nouveau problème d'optimisation, l'agent doit-il garder la même fonction d'utilité  $U$  ?
- Si non, quelle utilité  $U^Y$  doit-il définir, et quel est lien avec la fonction d'utilité initiale  $U$  ?
- Le numéraire étant lui-même une source de risque, comment cette utilité doit-elle en tenir compte ?

L'idée dans la suite est de raisonner comme si le numéraire était une simple constante (non risquée) et ce en raisonnant en terme de fonctions valeurs  $u$  et  $u^Y$  dans les deux marchés, fonctions définies

$$\begin{cases} u(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) \\ u^Y(z) = \sup_{\hat{\pi} \in \mathcal{A}(z, \hat{\mathcal{K}})} \mathbf{E}(U^y(T, \hat{X}_T^{z, \hat{\pi}})) \end{cases} \quad (2.52)$$

où nous avons noté

- i)  $\hat{\pi}$  les stratégies de portefeuilles dans le nouveau marché,
- ii)  $\hat{\mathcal{K}}$  le nouveau espace de contraintes,
- iii)  $\hat{X}^{z, \hat{\pi}}$  le processus de richesse dans  $\mathcal{M}^Y$ , issu de la richesse  $z$  suivant la stratégie  $\hat{\pi}$ .

L'avantage de raisonner à la date  $t = 0$  est que, d'un côté, la valeur du numéraire est une constante connue (non risquée) et d'un autre coté, ces deux fonctions valeurs s'interprètent naturellement comme étant les fonctions d'utilité à la date d'aujourd'hui de l'investisseur dans les deux marchés. Donc en examinant  $u$  et  $u^Y$ , nous simplifions de manière considérable les questions posées ci-dessus.

En effet, nous savons que  $z$  et  $zy$  ( $Y_0 = y$ ) représentent la même richesse exprimée dans deux monnaies différentes. Par conséquent, il est naturel de supposer



que l'agent leur associe la même satisfaction dans les deux marchés, donc la même utilité, c-à-d  $u^Y(z) = u(zY)$ ,

ce qui implique que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) = \sup_{\hat{\pi} \in \mathcal{A}(\frac{x}{y}, \hat{\mathcal{K}})} \mathbf{E}\left(U^y(T, \hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}})\right). \quad (2.53)$$

Ceci traduit alors une condition initiale à la date  $t = 0$  que doit satisfaire la nouvelle utilité.

Comme la propriété d'autofinancement est invariante par changement de numéraire, cela implique que les portefeuilles dans le nouveau marché  $\hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}}$ , multipliés par  $Y$  sont encore des portefeuilles dans le marché initial. Par conséquent, il existe  $\pi \in \mathcal{K}$  tel que

$$\hat{X}_T^{\frac{x}{y}, \hat{\pi}} Y_T = X_T^{x, \pi}.$$

Le problème d'optimisation de portefeuille dans le nouveau marché peut donc se transformer en un problème d'optimisation dans le marché initial. Ainsi, l'équation (7.2) devient

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}(U(T, X_T^{x, \pi})) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}\left(U^y(T, \frac{X_T^{x, \pi}}{Y_T})\right). \quad (2.54)$$

Remarquons enfin que le terme à gauche de cette identité peut se réécrire, en multipliant et en divisant par  $Y_T$ , sous la forme suivante

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})} \mathbf{E}\left(U(T, Y_T \frac{X_T^{x, \pi}}{Y_T})\right) \quad (2.55)$$

Ainsi, pour représenter l'utilité de l'investisseur dans le nouveau univers, un candidat naturel s'impose et est donné simplement par  $U^Y(T, z) = U(T, Y_T z)$ .

Pour conclure, il est important de noter que, par le simple raisonnement que nous venons de faire et en partant d'une utilité déterministe dans un marché initial, nous aboutissons à une seconde utilité dans un nouveau numéraire, une utilité qui est bien un processus stochastique, d'où encore une fois l'intérêt que nous porterons de manière générale à des utilités stochastiques qui à priori sont mieux adaptées à intégrer les données du marché dans lequel nous nous plaçons ainsi que son évolution au cours du temps (par exemple l'évolution du numéraire et le risque qu'il génère).

Il est important de mentionner que dans ce qui précède, nous ne montrons pas que  $z \mapsto U(T, Y_T z)$  est l'unique utilité, vérifiant la condition (7.2), que l'investisseur peut considérer pour représenter ses préférences. Il est possible qu'il en existe d'autres. Donc, l'unicité reste à étudier. Ainsi, il est inévitable de poser les quelques questions qui suivent :

- Sachant que ces utilités vérifient la même condition (7.2), sont-elles liées ?
- Est-ce que cette condition initiale détermine complètement l'utilité ?
- Plus général, connaissant la fonction d'utilité d'un agent à une date  $t$ , pouvons-nous la décrire dans le futur ?

Pour répondre à ces interrogations, il est important de noter que à priori ces utilités dépendent forcément, outre de la richesse  $z$  dans ce monde, du cours du numéraire (taux de change). Donc il n'y a aucune raison pour qu'elles soient des vraies fonctions déterministes de la richesse. Ceci nous suggère la piste des utilités stochastiques, et nous verrons dans la deuxième partie de ce manuscrit qu'ainsi posé, notre problème est très semblable à la caractérisation de ce qu'on appelle *forward dynamic utility*, notion introduite récemment par Zariphopoulou et Musiela (voir par exemple [84], [87], [89], [91]...)



# Chapitre 3

## Méthode duale pour le problème d' optimisation de portefeuille

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>89</b>
3.1.1	Le problème d'optimisation de portefeuille . . .	91
<b>3.2</b>	<b>Approche par Dualité . . . . .</b>	<b>92</b>
3.2.1	Fonctions polaires : transformée de Fenchel-Legendre	92
3.2.2	La formulation duale : idée générale . . . . .	94
<b>3.3</b>	<b>Résolution par dualité . . . . .</b>	<b>96</b>
3.3.1	Résultats d'existence . . . . .	97
3.3.2	Marché complet . . . . .	100
3.3.3	Marché incomplet . . . . .	101
3.3.4	Élasticité asymptotique . . . . .	113
<b>3.4</b>	<b>Appendice . . . . .</b>	<b>123</b>

---

### 3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment les méthodes de programmation dynamique et de contrôle stochastique, nous ont permis d'établir des équations aux dérivées partielles non linéaires (équations de HJB) que

doivent satisfaire les fonctions valeurs d'un problème d'optimisation de portefeuille. Mais le principe de cette méthode repose sur le fait que le marché était supposé markovien, c'est-à-dire que les paramètres du modèles sont des fonctions déterministes du temps et de l'état du système (cours des actifs) ainsi que la solution  $v$ .

L'introduction par Ross [99], Harrison et Kreps [41], et Harrison et Pliska [40] des mesures martingales équivalentes a permis de considérer un modèle plus général où le marché n'est plus supposé markovien. Cette nouvelle technique est basée sur l'approche par dualité du problème d'optimisation de portefeuille. Le cadre du marché complet, où l'ensemble des mesures martingales est réduit à un seul élément, a été développé, essentiellement, par Cox et Huang [11], Karatzas, Lechoczky et Shreve [53] et Pliska [97]. Le modèle plus compliqué de marché incomplet a été considéré par He et Pearson [42], Karatzas et Shreve et Xu [54] puis par Kramkov et Shachamayer [60, 61].

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème d'optimisation de portefeuille d'un point de vue dual.

Le modèle de marché considéré dans ce chapitre est un modèle de marché incomplet, constitué d'un actif sans risque  $\xi_0$ , dont nous supposons le prix constant égal à 1, et de  $d$  actifs risqués dont les prix notés  $(\xi^i)_{i=1..d}$  sont des semimartingales, dans un espace de probabilité filtré  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, \mathbb{P})$ .

Un vecteur  $\pi \in \mathbb{R}^d$  est une autofinancante, pour une richesse initiale  $x$ ,  $\pi$  est un processus progressif intégrable par rapport à  $\xi$ , ainsi la richesse réalisée  $X_t^{x,\pi}$  partant d'un capital initial  $x$  et suivant la stratégie  $\pi$  est donnée par

$$X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s d\xi_s, \quad t \leq T. \quad (3.1)$$

Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , nous notons par  $\mathcal{X}(x)$ , la famille des richesses positives à tout instant  $t \leq T$ , c-à-d.  $X_t^{x,\pi} \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , partant de  $x$  et dont la stratégie  $\pi$  est une stratégie autofinancante. Autrement dit,

$$\mathcal{X}(x) = \{X^{x,\pi} \geq 0 : X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s d\xi_s, \quad t \leq T, \pi \text{ autofinancante}\}. \quad (3.2)$$

Notons par  $\mathcal{M}^e$  l'ensemble des probabilités équivalentes (probabilités martingales), défini par

$$\mathcal{M}^e = \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \forall X \in \mathcal{X}(\cdot), X \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale locale}\}. \quad (3.3)$$

Comme nous nous plaçons dans un marché sans opportunité d'arbitrage nous supposons que

$$\mathcal{M}^e \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Le problème d'optimisation de portefeuille

Soit  $U$  une fonction d'utilité d'un agent à maturité  $T$ . Nous rappelons que  $U$  est une fonction continue sur son domaine  $\text{dom}(U) = \{x \in \mathbb{R} : U(x) > -\infty\}$ , dérivable, strictement croissante et strictement concave à l'intérieur de  $\text{dom}(U)$ . Dans ce chapitre nous nous plaçons dans le cadre où

**Hypothèse 3.1.** *La fonction d'utilité  $U$  satisfait*

$$\text{dom}(U) = [0, +\infty] \quad (3.5)$$

ce qui veut dire que, seulement, les richesses positives sont autorisées.

Nous supposons, de plus, que  $U$  satisfait l'hypothèse dite d'Inada suivante :

**Hypothèse 3.2.** *La fonction d'utilité  $U$  satisfait*

$$U'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = +\infty, \text{ et } U'(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} U'(x) = 0. \quad (3.6)$$

Une fois sur le marché, cet agent cherchera à déterminer sa stratégie optimale et sa fonction valeur  $u$  donnée par le problème d'optimisation suivant :

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \quad (3.7)$$

Supposons ensuite :

**Hypothèse 3.3.** *Il existe  $x_0 > 0$  tel que la fonction valeur  $u$ , satisfait*

$$u(x_0) < +\infty. \quad (3.8)$$

**Remarque 3.1.** *Remarquons que cette hypothèse est équivalente à*

$$u(x) < +\infty, \quad \forall x > 0. \quad (3.9)$$

En effet, comme  $U$  est croissante concave, il en est de même pour la fonction valeur  $u$ . Donc la croissance de  $u$  va impliquer dans un premier temps que, pour tout  $x \leq x_0$ ,  $u(x) \leq u(x_0) < +\infty$ .

Soit maintenant  $x_1 \geq x_0$  quelconque. Pour conclure il faut montrer que  $u(x_1) < +\infty$ . Pour cela il faut juste remarquer qu'on peut toujours trouver un  $x'_0 \leq x_0$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  :  $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x'_0$ , donc, puisque  $u$  est concave, nous déduisons l'inégalité suivante

$$u(x_1) \leq \frac{u(x_0) - \lambda u(x'_0)}{1 - \lambda} < +\infty. \quad (3.10)$$

Notons que l'hypothèse 3.3 porte directement sur la fonction valeur en elle-même, ce qui peut nous paraître étrange, mais nous verrons dans la suite qu'elle est automatiquement satisfaite dès que  $U$  vérifie une condition dite d'élasticité asymptotique. Avant d'introduire la méthode dite duale, quelques hypothèses et définitions sont nécessaires, nous supposons par exemple que dans toute la suite les fonctions d'utilités que nous allons considérer vérifient les conditions d'Inada 3.2, ce qui va nous permettre, dans un premier temps, d'introduire la notion du convexe dual, appelé aussi la transformée de Fenchel.

## 3.2 Approche par Dualité

### 3.2.1 Fonctions polaires : transformée de Fenchel-Legendre

**Définition 3.1.** On appelle transformée de Fenchel d'une fonction  $U$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , croissante concave et vérifiant l'hypothèse 3.2, la fonction  $\tilde{U}$ , définie par :

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (3.11)$$

Nous notons  $\text{dom}(\tilde{U})$  le domaine de  $\tilde{U}$  donné par

$$\text{dom}(\tilde{U}) = \left\{ y > 0 : \tilde{U}(y) < +\infty \right\}.$$

La fonction polaire  $\tilde{U}$  ainsi définie comme le supremum point par point des fonctions affines  $y \mapsto U(x) - xy$  est alors une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^d$ . La fonction  $\tilde{U}$  est aussi appelée fonction polaire.

On peut également définir la transformée de Fenchel-Legendre de la transformée de Fenchel-Legendre. Dans les résultats suivants, nous établissons un lien entre la différentiabilité de  $U$  et celle de son dual.

**Proposition 3.1.** *Soit  $U$  une fonction concave semi-continue inférieurement de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  et  $\tilde{U}$  sa transformée de Fenchel. Alors pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , les équivalences suivantes sont satisfaites*

$$y \in \partial U(x) \Leftrightarrow x \in \partial \tilde{U}(y) \Leftrightarrow U(x) = xy + \tilde{U}(y). \quad (3.12)$$

**Proposition 3.2.** *Soit  $U$  une fonction concave semicontinue inférieurement de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , strictement concave sur  $\text{Int}(\text{dom}(U))$ . Alors sa transformée de Fenchel-Legendre  $\tilde{U}$  est différentiable sur  $\text{Int}(\text{dom}(\tilde{U}))$ . Si de plus,  $U$  est différentiable sur  $\text{Int}(\text{dom}(U))$  alors son gradient  $U'$  est une bijection de  $\text{Int}(\text{dom}(U))$  dans  $\text{Int}(\text{dom}(\tilde{U}))$  avec  $U' = -(\tilde{U}')^{-1}$  et  $\tilde{U}$  est strictement convexe sur  $\text{Int}(\text{dom}(\tilde{U}))$ .*

Dans la suite, les fonctions  $U$  qui nous intéressent sont des fonctions à une variable définies sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Nous retenons en particulier le résultat suivant.

**Lemme 3.1.** *Soit  $U$  une fonction concave croissante dérivable telle que  $U'(\infty) = 0$ , notons  $I = (U')^{-1}$  (strictement décroissante, et vérifiant  $I(0) = +\infty$ ,  $I(+\infty) = 0$ ), alors le dual convexe  $\tilde{U}$  de  $U$  est une fonction croissante semi-continue vérifiant :*

(i) *Le dual convexe  $\tilde{U}$ , est donné par*

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y) & \text{si } y > 0 \\ U(\infty) & \text{si } y = 0 \\ \infty & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

(ii)  *$\tilde{U}'$  est définie, continue croissante  $\tilde{U}' = -I$ .*

(iii) *La transformation duale (3.11) admet une transformation inverse. En effet  $U$  peut être retrouvée par la formule*

$$U(x) = \inf_{y>0} [\tilde{U}(y) + xy], \quad x > 0 \quad (3.14)$$

*ou encore pour tout  $x > 0$ ,*

$$U(x) = \tilde{U}((\tilde{U})^{-1}(-x)) + x(\tilde{U})^{-1}(-x). \quad (3.15)$$



### 3.2.2 La formulation duale : idée générale

Comme l'indique le titre, ce paragraphe a pour but de simplifier la compréhension de cette nouvelle approche, en donnant simplement l'idée générale de cette méthode, les détails de calculs et les difficultés techniques seront abordés et étudiés essentiellement dans le paragraphe suivant.

Soient  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $X_T \in \mathcal{X}(x)$  et enfin  $Z_T \in \mathcal{M}^e$ , alors par (3.3) et par définition du conjugué  $\tilde{U}$ , nous avons :

$$\mathbb{E}(U(X_T)) \leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T) + yZ_TX_T) \leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx \quad (3.16)$$

ceci étant vrai pour tout  $Z \in \mathcal{M}^e$ , en particulier l'inégalité suivante est vraie :

$$\mathbb{E}(U(X_T)) \leq \inf_{Z_T \in \mathcal{M}^e} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx. \quad (3.17)$$

Notons ensuite  $\tilde{u}$  la fonction valeur du problème dit dual suivant :

$$\tilde{u}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Z_T \in \mathcal{M}^e} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)). \quad (3.18)$$

Prenons le supremum sur tous les  $X_T$  et l'infimum sur tous les  $y$  dans (3.17), nous obtenons :

$$u(x) \leq \inf_{y>0} [\tilde{u}(y) + xy] = \inf_{y>0, Z_T \in \mathcal{M}^e} [\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx] \quad (3.19)$$

Intéressons-nous au problème d'optimisation à droite de cette inégalité

$$\inf_{y>0} [\tilde{u}(y) + xy] = \inf_{y>0, Z_T \in \mathcal{M}^e} [\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx]. \quad (3.20)$$

et supposons qu'il existe un couple,  $(y^*, Z_T^*)$ , optimal pour ce problème. Alors en posant

$$X_T^* = I(y^* Z_T^*), \quad (3.21)$$

l'idée est alors de montrer que cette variable  $X_T^*$  est non seulement dans l'espace  $\mathcal{X}(x)$ , mais aussi que  $X_T^* Z_T^*$  est une martingale c-à-d :

$$\mathbb{E}(X_T^* Z_T^*) = x. \quad (3.22)$$

De plus les équations (3.21) et (3.13) vont nous permettre, en particulier, d'écrire que

$$\begin{aligned} U(X_T^*) &= U(I(y^* Z_T^*)) \\ &= \tilde{U}(y^* Z_T^*) + y^* Z_T^* I(y^* Z_T^*) \\ &= \tilde{U}(y^* Z_T^*) + y^* Z_T^* X_T^*. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En prenant l'espérance et en tenant compte de l'identité (3.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X_T^*)) &= \mathbb{E}(\tilde{U}(y^* Z_T^*)) + y^* \mathbb{E}(Z_T^* X_T^*) \\ &= \mathbb{E}(\tilde{U}(y^* Z_T^*)) + y^* x. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Or par définition de la fonction valeur  $u$  (équation (3.7)), nous avons l'inégalité

$$\mathbb{E}(U(X_T^*)) \leq u(x).$$

Combinons cette dernière inégalité avec (3.19), nous déduisons que c'est bien une égalité. Ce qui implique que non seulement cette variable  $X_T^{x,*}$  est optimale pour le problème primal, mais aussi que la relation de conjugaison pour les deux fonctions valeur du problème primal  $u$  et du problème dual  $\tilde{u}$  est satisfaite,

$$u(x) = \inf_{y>0} \{ \tilde{u}(y) + xy \} = \tilde{u}(y^*) + xy^*. \quad (3.25)$$

**Remarque 3.2.** Supposons que  $\forall y > 0$  il existe  $Z_T \in \mathcal{M}^e$  :  $\mathbb{E}(\tilde{U}(y Z_T)) < \infty$ , alors la fonction valeur du problème dual est finie, c-à-d

$$\tilde{u}(y) < \infty, \quad \forall y > 0$$

donc, d'après l'inégalité (3.19),

$$u(x) \leq \inf_{y>0} \{ \tilde{u}(y) + xy \} < +\infty.$$

En particulier,

$$\frac{u(x)}{x} \leq \frac{\tilde{u}(y)}{x} + y, \quad \forall x, y > 0. \quad (3.26)$$

Nous en dédui alors, en passant à la limite supérieure, que la condition

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x} \leq 0$$

est satisfaite.

### 3.3 Résolution par dualité

Notons  $\mathbb{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  l'ensemble des variables aléatoires  $\mathcal{F}_T$ -mesurables et positives p.s, et pour  $x \in \mathbb{R}$ , nous noterons par  $\mathcal{C}(x)$  l'ensemble des actifs contingents qui peuvent être sur-couverts sans risque à partir de la richesse initiale  $x$  et d'une stratégie de portefeuille admissible,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= \{X_T \in \mathbb{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, P) : \exists \pi \in \mathcal{A}(x), X_T^{x, \pi} \geq X_T\} \\ &= \left\{X_T \in \mathbb{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, P) : \exists \pi \in \mathcal{A}(x), x + \int_0^T \pi_s d\xi_s \geq X_T\right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ceci nous amène alors à la formulation duale de  $\mathcal{C}(x)$  suivante

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \mathbb{E}(Z_T X_T) \leq x, \quad \forall Z \in \mathcal{M}^e \quad (3.28)$$

La raison pour laquelle nous introduisons l'ensemble  $\mathcal{C}(x)$  est due essentiellement à ces propriétés intéressantes dans toute cette approche par dualité et notamment le fait que  $\mathcal{C}(x)$  soit fermé pour la convergence en mesure (théorème 3.9) contrairement à  $\mathcal{X}(x)$ . De plus, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.2.** *Dans la définition (3.7) de la fonction valeur  $u$ , nous pouvons remplacer l'ensemble  $\mathcal{X}(x)$  par  $\mathcal{C}(x)$ . En d'autres termes*

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)) = \sup_{X \in \mathcal{C}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \quad (3.29)$$

*Démonstration.* En remarquant que  $\mathcal{X}(x) \subset \mathcal{C}(x)$ ,

$$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)) \leq \sup_{X \in \mathcal{C}(x)} \mathbf{E}(U(T, X_T)). \quad (3.30)$$

Par la suite, comme pour tout  $X \in \mathcal{C}(x)$ , il existe  $X' \in \mathcal{X}(x)$  tel que  $X' \geq X$ , il en découle, par monotonie de la fonction d'utilité  $U$ , l'inégalité dans l'autre sens.  $\square$

En se basant sur ce lemme, nous pouvons alors énoncer un premier résultat d'existence d'une richesse optimale au problème (3.29).

### 3.3.1 Résultats d'existence

Nous supposons, dans ce paragraphe, que la fonction valeur  $u$  vérifie l'hypothèse suivante,

**Hypothèse 3.4.**

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x} \leq 0. \quad (3.31)$$

Notons, qu'encore une fois, l'hypothèse 3.4 est une hypothèse sur la fonction valeur, nous verrons dans la suite qu'une hypothèse dite d'élasticité asymptotique sur la fonction d'utilité  $U$  est suffisante pour que les hypothèses 3.3 et 3.4 soient toutes les deux satisfaites.

Avant de poursuivre nos investigations et d'écrire une nouvelle méthode de résolution nous nous intéressons d'abord, dans ce paragraphe, à la question de l'existence d'une solution à notre problème. Nous allons donc montrer l'existence d'une telle solution et nous verrons dans la preuve du théorème qui suit que la condition (3.8) est la condition nécessaire pour surmonter certaines difficultés de la démonstration, nous donnerons aussi dans la suite quelques conditions portant sur  $U$  pour que cette hypothèse soit satisfaite.

**Théorème 3.1.** *Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2 et 3.3 et dont le domaine est  $\text{dom}(U) = [0, +\infty]$ , alors pour tout  $x > 0$ , il existe une unique solution  $X_T^{x,*}$  au problème (3.29).*

*Démonstration.* Commençons par la partie facile de cette démonstration.

**Unicité :**

Supposons qu'il existe deux portefeuilles optimaux  $X^1$  et  $X^2$  pour le problème d'optimisation de portefeuille qu'on considère, telles que

$$\mathbb{P}(X^{x,1} \neq X^{x,2}) > 0.$$

Posons, ensuite,  $X = \frac{X^1 + X^2}{2}$ . Alors par la stricte concavité de la fonction  $U$ , il en découle

$$\mathbb{E}(U(X)) = \mathbb{E}\left(U\left(\frac{X^{x,1} + X^{x,2}}{2}\right)\right) > \frac{1}{2}(\mathbb{E}(U(X^{x,1})) + \mathbb{E}(U(X^{x,2}))) = v(x)$$

ce qui est contradictoire à la définition de la fonction valeur  $v$ , d'où l'unicité.

### Existence :

Soit  $x > 0$ , l'idée de cette preuve est de raisonner à l'aide d'une suite maximisante de  $v(x)$ , qu'on notera par  $(X^{x,n})_{n \geq 0}$  dans l'ensemble  $\mathcal{C}(x)$ , c-à-d

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U(X^{x,n})) = v(x) < \infty \quad (3.32)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, la définition suivante nous sera d'une grande utilité.

**Définition 3.2.** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites quelconques de  $\mathbb{R}^n$ , nous notons  $b_n \in \text{Conv}(a_n, a_{n+1}, \dots)$  pour tout  $n \geq 0$  si et seulement si  $\exists N_n \geq n$ ,  $\alpha_i \in [0, 1], i = n \dots N_n$  :  $b_n = \sum_{i=n}^{N_n} \alpha_i a_i$ .

En utilisant le théorème de compacité (théorème 3.8) dans  $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ , il existe une suite  $\tilde{X}^{x,n} \in \text{Conv}(X^{x,n}, X^{n+1}, \dots)$ , qui est encore dans l'ensemble  $\mathcal{C}(x)$  et telle que  $(\tilde{X}^{x,n})_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $X_T^{x,*}$ . Comme  $\mathcal{C}(x)$  est fermé pour la convergence en mesure (théorème 3.9), nous en déduisons que  $X_T^{x,*}$  est à son tour dans  $\mathcal{C}(x)$ . De plus par concavité de la fonction d'utilité  $U$  et par la définition de la suite maximisante  $(X^{x,n})_{n \geq 0}$ , il s'en suit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U(\tilde{X}^{x,n})) = v(x) < \infty. \quad (3.33)$$

Comme  $X_T^{x,*}$  est dans  $\mathcal{C}(x)$  alors il existe une stratégie admissible autofinancante  $\pi^*$  tel que  $X_T^{x,\pi^*} = X_T^{x,*}$  p.s. En d'autres termes,  $X_t^{x,*}$  est bien un portefeuille atteignable et en particulier peut être un bon candidat pour jouer le rôle de la richesse optimale pour le problème d'optimisation de portefeuille. Il est clair que, pour prouver l'optimalité de cette variable il faut qu'on arrive à démontrer l'identité suivante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U(X_T^{x,*})).$$

Notons par  $U^+$  et  $U^-$  les parties positives et négatives de  $U$ , et remarquons que, d'une part d'après (3.33),

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) &< \infty \\ \text{et} \\ \sup_n \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) &< \infty \end{aligned}$$

et d'autre part, grâce au lemme de Fatou,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) \geq \mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})).$$

Nous déduisons alors que

$$\mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})) < \infty$$

et par conséquent, nous avons l'égalité suivante,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U^-(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^-(X_T^{x,*})).$$

À ce niveau, il est évident que la variable  $X_T^{x,*}$  est optimale si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^+(X_T^{x,*})). \quad (3.34)$$

**Remarque 3.3.** Dans la suite, nous supposons que  $U(+\infty) > 0$  car sinon, comme  $U$  est croissante, nous avons  $U^+ = 0$  et il n'y a rien à prouver dans ce cas.

Pour démontrer (3.34), nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un  $\varepsilon > 0$ , tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U^+(\tilde{X}^{x,n})) = \mathbb{E}(U^+(X_T^{x,*})) + \varepsilon.$$

Donc en considérant une sous suite  $(\bar{X}^{x,n})_{n \geq 0}$  de  $(\tilde{X}^{x,n})_{n \geq 0}$ , d'après le théorème 3.11, il existe une famille d'ensembles notés  $(B_n)_{n \geq 0}$  :

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \mathbb{E}(U^+(\bar{X}^{x,n}) \mathbf{1}_{B_n}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons  $x_0 = \inf \{x > 0 : U(x) \geq 0\}$ , et considérons la suite de variables aléatoires définie par :

$$Y^{x_0, x, n} = x_0 + \sum_{k=1}^n \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}$$

et vérifiant, pour tout  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$ , l'inégalité

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n}) \leq x_0 + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}).$$

Comme  $\bar{X}^k \in \mathcal{C}(x)$  alors d'après la formulation duale (3.28), ceci implique

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n}) \leq x_0 + \sum_{k=1}^n x = nx + x_0$$

ce qui prouve que la variable  $Y^{x_0, x, n}$  est dans l'ensemble  $\mathcal{C}(nx + x_0)$ .

Ceci d'une part mais d'autre part,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n}) = \mathbb{E}(U(x_0 + \sum_{k=1}^n \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n})) = \mathbb{E}(U^+(x_0 + \sum_{k=1}^n \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n}))$$

Donc, en rappelant que la fonction  $U^+$  est croissante et que les  $B_k$  sont disjoints, on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n}) \geq \mathbb{E}(U^+(\sum_{k=1}^n \bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n})) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\bar{X}^k \mathbf{1}_{B_n})) \geq \frac{n\varepsilon}{2}. \quad (3.35)$$

Comme  $v(x) \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n})$ , alors en divisant par  $x$  et en utilisant (3.35), il en découle

$$\frac{v(x)}{x} \geq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n})}{x} \geq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y^{x_0, x, n})}{nx + x_0} \geq \frac{n\varepsilon}{2(nx + x_0)}$$

en prenant ensuite la limite supérieure

$$0 = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{x} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

Ce qui est impossible, nous concluons donc que  $X_T^{x,*}$  est optimal pour le problème  $v(x)$ .

□

### 3.3.2 Marché complet

Dans cet exemple, le marché financier est supposé complet, c'est-à-dire que l'ensemble des probabilités martingales équivalentes est réduit à une probabilité dite risque neutre  $\mathbb{Q}$ , c-à-d

$$\mathcal{M}^e = \{\mathbb{Q}\}.$$

Notons  $Z$  le processus de densité martingale défini par  $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ , en terme des notations du chapitre précédent  $Z$  correspond à la variable  $H^{0,\eta}$ . La fonction valeur du problème dual (3.18) devient

$$\tilde{u}(y) = \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)).$$

Dans ce contexte nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 3.2.** *Supposons que les hypothèses 3.2, 3.3 et 3.4 sont satisfaites. Alors*

- (i)  $u(x) < +\infty$ , pour tout  $x > 0$  et  $\tilde{u}(y) < +\infty$  pour  $y$  suffisamment grand. Notons  $y_0$  et  $x_0$  les réels définis par  $y_0 = \inf\{y : \tilde{u}(y) < +\infty\}$ ,  $x_0 = \lim_{y \downarrow y_0} (-\tilde{u}'(y))$ . Alors  $\tilde{u}$  est continûment différentiable et strictement convexe sur  $(y_0, +\infty)$ ,  $u$  est continûment différentiable sur  $(0, +\infty)$  et strictement convexe sur  $(0, x_0)$ . De plus  $u$  et  $v$  sont conjuguées,

$$\begin{cases} \tilde{u}(y) = \sup_{x>0} [u(x) - xy], & y > 0 \\ u(y) = \inf_{x\geq 0} [\tilde{u}(x) + xy], & x > 0 \end{cases}$$

et satisfont

$$u'(0) = \lim_{x \downarrow 0} u'(x) = +\infty, \quad \tilde{u}'(+\infty) = \lim_{y \uparrow +\infty} \tilde{u}'(y) = 0.$$

- (ii) Si  $x < x_0$ , l'optimum  $X^{x,*} \in \mathcal{X}(x)$  est une martingale uniformément intégrable sous la probabilité  $\mathbb{Q} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_T = Z_T$  et est donné par

$$X_T^{x,*} = I(u'(x)Z_T), \quad I = (U')^{-1} = -V'.$$

- (iii) Pour  $x < x_0$  et  $y > y_0$ , nous avons les identités suivantes

$$xu'(x) = \mathbb{E}(X_T^{x,*} U'(X_T^{x,*})), \quad y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(Z_T V'(yZ_T)).$$

Comme ce résultat n'est qu'un cas particulier des résultats que nous établirons dans le cadre du marché incomplet, où  $\mathcal{M}^e$  n'est plus réduit à une unique martingale équivalente, la preuve sera donnée uniquement dans le cas général.

### 3.3.3 Marché incomplet

Dans le paragraphe 3.1 de ce chapitre, nous avons établi sous certaines conditions et hypothèses portant sur la fonction d'utilité finale et la fonction valeur, l'existence et l'unicité de la richesse optimale au problème primal. Nous avons vu aussi dans la description de l'idée de la résolution par dualité que, s'il existe



un couple  $(y^*, Z_T^*)$  optimal au problème dual (3.20), alors, nous pouvons donner une caractérisation explicite de la richesse optimale donnée par (3.21), d'où l'intérêt que nous portons à cette nouvelle méthode.

Dans la suite de ce paragraphe nous nous intéressons essentiellement à la résolution de ce nouveau problème (3.20), nous établirons en particulier les conditions suffisantes assurant l'existence d'un couple optimal  $(y^*, Z_T^*)$ .

**Problématique :** La technique utilisée pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.20) est identique à celle qu'on a utilisé pour montrer le même résultat pour le problème primal dans le paragraphe 3.1 et essentiellement développée par Kramkov et Schachermayer dans [60] et qui consiste à raisonner par des suites maximisantes  $(Z_T^n)_{n \geq 0}$ , sauf que, dans le cadre du nouveau problème, cette technique ne peut être appliquée directement car il n'existe pas de théorème de compacité sur l'ensemble  $\mathcal{M}^e$  dans lequel nous optimisons.

En effet, puisque l'ensemble  $\mathcal{M}^e$  est inclus dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ , alors si nous considérons une suite de probabilités maximisantes  $(Z_T^n)_{n \geq 0}$  par le théorème 3.7 de Kolmos nous pouvons trouver une combinaison convexe

$$\tilde{Z}_T^n \in \text{Conv}(Z_T^n, Z_T^{n+1}, \dots), \quad \forall n \geq 0$$

qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $Z_T^*$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ . Contrairement au raisonnement de la preuve du théorème 1, cette variable aléatoire n'est en général pas une probabilité  $\mathcal{M}^e$ . Fondamentalement ceci est dû au fait que l'espace des richesses n'est pas en dualité adéquate avec  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ , voir le paragraphe 5 de [60], pour des contre exemples.

L'idée est alors de remplacer l'ensemble sur lequel nous optimisons  $\mathcal{M}^e$  par un nouvel ensemble  $\mathcal{D}$  qui lui a les bonnes propriétés voulues, en particulier la propriété de fermeture.

Cet ensemble  $\mathcal{D}$  est l'ensemble convexe, solide et fermé de  $\mathcal{M}^e$  dans  $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  c-à-d c'est le plus petit ensemble convexe solide et fermé dans  $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  qui contient  $\mathcal{M}^e$ .

**Définition 3.3.** Un ensemble  $E$  dans  $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  est dit solide si :  $0 \leq Y_T' \leq Y_T$  p.s et  $Y_T \in E$  implique que  $Y_T' \in E$ .

On remarquera que  $\mathcal{D}$  est donné par :

$$\mathcal{D} = \left\{ Y \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : \exists (Z^n)_{n \geq 0} \in \mathcal{M}^e, \ Y \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} Z^n \right\} \quad (3.36)$$

Donc pour tout  $Y \in \mathcal{D}$ ,  $\exists (Z^n)_{n \geq 0} \in \mathcal{M}^e$ ,  $Y \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} Z^n$ , et pour tout  $X \in \mathcal{C}(x)$  nous avons par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}(XY) \leq \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Z^n X\right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z^n X) \leq x.$$

Il en découle l'implication suivante :

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \implies \mathbb{E}(XY) \leq x, \quad \forall Y \in \mathcal{D}.$$

La réciproque étant une simple conséquence du fait que  $\mathcal{M}^e \subset \mathcal{D}$ , nous obtenons alors la caractérisation duale suivante :

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \iff \mathbb{E}(XY) \leq x, \quad \forall Y \in \mathcal{D} \quad (3.37)$$

et nous définissons dans la suite le nouveau problème dual suivant :

$$\tilde{u}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Z_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) \quad (3.38)$$

où nous avons gardé la même notation  $\tilde{u}$  pour la fonction valeur car nous verrons dans la suite que l'infimum dans (3.18) et dans (3.38) est le même, donc les deux fonctions valeur à ces deux problèmes sont identiques.

### Premier résultat principal

Un des principaux résultats de ce chapitre, démontré par Kramkov et Schachermayer [60], est le suivant :

**Théorème 3.3.** *Nous supposons que la fonction d'utilité  $U$  satisfait les hypothèses 3.2 et 3.3. Alors :*

- (i)  $u(x) < \infty$ , pour tout  $x > 0$  et il existe  $y_0 > 0$  tel que  $\tilde{u}(y) < \infty$ ,  $\forall y > y_0$ ,  
de plus les relations de conjugaison suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} u(x) = \inf_{y > 0} \{ \tilde{u}(y) + xy \}, & \forall x > 0 \\ \tilde{u}(y) = \sup_{x > 0} \{ \tilde{u}(x) - xy \}, & \forall x > 0. \end{cases}$$

La fonction valeur  $u$  est continûment différentiable dans  $(0, \infty)$  et la fonction  $\tilde{u}$  est strictement convexe dans le domaine  $\{\tilde{u} < \infty\}$ .

(ii) Les dérivées des fonctions valeurs  $u'$  et  $\tilde{u}'$  sont telles que :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty$$

$$- \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}_y(y) = 0.$$

(iii) Si  $\tilde{u}(y) < \infty$  pour un certain  $y$ , alors il existe une unique solution optimale  $Z^*$  (dépend de  $y$ ) au problème (3.38).

**Remarque 3.4.** L'existence d'une solution optimale  $Z^*$  au problème (3.38) dans (iii) est fortement liée à l'hypothèse  $\tilde{u}(y) < \infty$ . Dans le théorème 3.6 Kramkov et al. montrent que cette hypothèse est automatiquement vérifiée, dès que l'élasticité asymptotique de la fonction d'utilité  $U$  est strictement inférieure à 1.

La démonstration de ce théorème sera établie sous forme de plusieurs lemmes et propositions. On utilisera dans les différentes étapes de cette preuve et à plusieurs reprises le résultat suivant :

**Lemme 3.3.** Soit  $(l_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires positives. Alors il existe une suite  $g_n \in \text{Conv}(l_n, l_{n+1}, \dots)$ ,  $\forall n \geq 1$ , qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $g \geq 0$ .

Voir par exemple le lemme 4.2 dans [60] pour des versions plus complètes de ce résultat.

**Lemme 3.4.** Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2 et 3.3. Alors pour tout  $y > 0$  la famille  $\{\tilde{U}^-(yY_T), Y_T \in \mathcal{D}\}$  est uniformément intégrable, et si  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variable dans  $\mathcal{D}$  qui converge vers  $Y$  alors  $Y \in \mathcal{D}$  et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U(yY_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}(yY)). \quad (3.39)$$

*Démonstration.* : Supposons que  $\tilde{U}(\infty) < 0$  sinon il n'y a rien à prouver, et considérons la fonction inverse de  $-\tilde{U}$

$$\phi : (-\tilde{U}(0), -\tilde{u}(\infty)) \rightarrow (0, \infty).$$

Remarquons d'abord qu'on a :

$$\tilde{U} = \tilde{U}^+ - \tilde{U}^-, \quad \tilde{U}^+ = \tilde{U} \mathbb{1}_{\tilde{U} \geq 0}, \quad \tilde{U}^- = \tilde{U} \mathbb{1}_{\tilde{U} \leq 0}$$

donc

$$\begin{cases} \phi(-\tilde{U}(h)) = \phi(-\tilde{U}^+(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \geq 0} + \phi(-\tilde{U}^-(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \leq 0} \\ \phi(-\tilde{U}^-(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \leq 0} = \phi(-\tilde{U}(h)) - \phi(-\tilde{U}^+(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \geq 0}. \end{cases}$$

Comme  $\tilde{U}^- = 0$  dans l'ensemble  $\{\tilde{U} \geq 0\}$ , on a alors  $\phi(-\tilde{U}^-(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \geq 0} = 0$ , et par suite,

$$\phi(-\tilde{U}^-(h)) = \phi(-\tilde{U}(h)) - \phi(-\tilde{U}^+(h)) \mathbb{1}_{\tilde{U} \geq 0} + \phi(0)$$

Comme  $-\tilde{U}$  est une fonction strictement croissante alors  $\phi$  a la même propriété. En remarquant maintenant que  $\tilde{U}^+ \leq \tilde{U}$  cela implique

$$\phi(-\tilde{U}^+)(h) \geq \phi(-\tilde{U})(h) \geq \phi(-\tilde{U})(0) = 0$$

et par conséquent

$$\phi(-\tilde{U}^-(h)) \leq \phi(-\tilde{U}(h)) + \phi(0) = h + \phi(0).$$

En remplaçant  $h$  par  $yh$  et en prenant l'espérance on obtient :

$$\mathbb{E} \left( \phi(-\tilde{U}^-(yh)) \right) \leq \mathbb{E}(yh) + \phi(0) \leq y + \phi(0), \quad \forall h \in \mathcal{D}.$$

Rappelons ensuite que  $I = -\tilde{U}' = (U')^{-1}$ , et donc en appliquant le théorème de l'Hospital, on déduit

$$\lim_{x \rightarrow -\tilde{U}(\infty)} \frac{\phi}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{-\tilde{U}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{I(y)} = \infty.$$

On conclut avec le théorème 3.10 de La Vallée-Poussin.

Soit, maintenant, une suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathcal{D}$  qui converge presque sûrement vers une variable  $Y$ . D'après ce qui précède la suite  $(\tilde{U}^-(yY_n))_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable, par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^-(yY_n)) = \mathbb{E}(\tilde{U}^-(yY)) \tag{3.40}$$

et par le lemme de Fatou, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^+(yY_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}^+(yY)). \quad (3.41)$$

(3.40) et (3.41) impliquent (3.39). Finalement on note que  $Y$  est un élément de  $\mathcal{D}$  car  $\mathcal{D}$  est un ensemble fermé pour la convergence en probabilité, ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

Le résultat suivant montre qu'on a bien l'existence et l'unicité de la solution au problème dual (3.38), si la fonction d'utilité  $U$  satisfait les hypothèses 3.2 et 3.3.

**Proposition 3.3.** *Supposons que la fonction d'utilité  $U$  satisfait les hypothèses 3.2, 3.3 et  $\tilde{u} < +\infty$ . Alors la solution optimale  $Z^*$  du problème (3.38) existe et est unique. De plus  $\tilde{u}$  est strictement convexe sur le domaine  $\{\tilde{u} < \infty\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathcal{D}$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_n)) = \tilde{u}(y)$$

Encore une fois, d'après le lemme (3.4), il existe une suite notée  $\tilde{Z} \in \text{Conv}(Z_n, Z_{n+1}, \dots)$  qui converge presque sûrement vers une variable  $Z^* \in \mathcal{D}$ .

Par convexité de la fonction  $\tilde{U}$  on déduit que :

$$\mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) \leq \sup_{m \geq n} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_m))$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) = \tilde{u}(y)$$

donc, par le lemme de Fatou, on obtient

$$\mathbb{E}(\tilde{U}(yZ^*)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(y\tilde{Z}_n)) = \tilde{u}(y)$$

d'où l'existence d'une solution. En ce qui concerne l'unicité de cet optimum  $Z^*$ , elle est obtenue comme une simple conséquence de la stricte convexité de  $\tilde{U}$ ,

$$\tilde{u}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \mathbb{E}(\tilde{U}\left(\frac{y_1 Z_1^* + y_2 Z_2^*}{2}\right)) < \frac{\tilde{u}(y_1) + \tilde{u}(y_2)}{2}.$$

Ensuite la stricte convexité de la fonction valeur est encore obtenue comme simple conséquence de celle de la fonction d'utilité.  $\square$

**Proposition 3.4.** (*Relation de conjugaison*)

Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses 3.2, 3.3 et  $\tilde{u} < +\infty$ . Alors nous avons les relations de conjugaison suivantes, entre la fonction valeur du problème primal et celle du problème dual, suivantes :

$$u(x) = \inf_{y>0} \{ \tilde{u}(y) + xy \}, \quad \forall x > 0 \quad (3.42)$$

$$\tilde{u}(y) = \sup_{x>0} \{ \tilde{u}(x) - xy \}, \quad \forall y > 0. \quad (3.43)$$

*Démonstration.* : Soient  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $X_T \in \mathcal{C}(x)$  et enfin  $Z_T \in \mathcal{M}^e$ , alors par (3.28) et par définition du conjugué  $\tilde{U}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X_T)) &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T) + yZ_TX_T) \\ &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T)) + yx \end{aligned}$$

donc en passant le terme  $xy$  à gauche et en prenant le supremum sur tout les  $X \in \mathcal{C}(x)$  et le supremum sur tous les  $Z \in \mathcal{D}$ , on obtient

$$u(x) - xy = \sup_{X_T \in \mathcal{C}(x)} \mathbb{E}(U(X_T)) - xy \leq \tilde{u}(y) = \sup_{Z_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_T))$$

et par suite

$$\sup_{x>0} \{ u(x) - xy \} \leq \tilde{u}(y), \quad \forall y > 0.$$

On fixe ensuite  $y > 0$  et on suppose que la quantité  $\sup_{x>0} \{ u(x) - xy \} < +\infty$ . Pour tout  $n > 0$ , on définit l'ensemble

$$\mathcal{B}_n = \{ g \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : g \leq n \}.$$

Par définition, l'ensemble  $\mathcal{D}$  est un convexe fermé de  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  et on peut donc appliquer le théorème 3.12, pour établir l'égalité suivante, à  $n$  fixé :

$$\sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \{ \mathbb{E}(U(X_T) - yX_TY_T) \} = \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \{ \mathbb{E}(U(X_T) - yX_TY_T) \}. \quad (3.44)$$

D'après la relation de dualité entre  $\mathcal{C}(x)$  et  $\mathcal{D}$ , il est facile d'écrire que  $X_T \in \mathcal{C}(x)$  si et seulement si

$$\sup_{Y_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(X_TY_T) \leq x$$

d'où, en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini dans (3.44),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \{\mathbb{E}(U(X_T) - yX_T Y_T)\} &= \sup_{x > 0} \sup_{X_T \in \mathcal{C}(x)} \{\mathbb{E}(U(X_T)) - xy\} \\ &= \sup_{x > 0} \{u(x) - xy\}. \end{aligned}$$

Ceci d'une part, mais d'autre part le terme à droite de cette identité s'écrit,

$$\inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \sup_{X_T \in \mathcal{B}_n} \{\mathbb{E}(U(X_T) - yX_T Y_T)\} = \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \left\{ \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_T)) \right\}$$

où  $\tilde{U}^n$  est la fonction définie par :

$$\tilde{U}^n(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 < x \leq n} \{U(x) - xy\}.$$

On lui associe la fonction valeur  $\tilde{u}^n$  donnée par

$$\tilde{u}^n(y) = \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_T)) \quad (3.45)$$

et on remarquera qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}^n(y) = \tilde{u}(y)$$

pour prouver (3.43), de telle sorte que d'après l'identité (3.45) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}^n(y) = \sup_{x > 0} \{u(x) - xy\}$$

Remarquons d'abord que par définition on a :

$$\tilde{u}^n \leq \tilde{u}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.46)$$

Soit maintenant  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathcal{D}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yY_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}^n(y).$$

D'après le lemme (3.3), il existe une suite  $Z_n \in \text{Conv}(Y_n, Y_{n+1}, \dots)$ , qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $Y^*$ . Puisque l'ensemble  $\mathcal{D}$  est fermé pour la convergence en mesure ceci implique que cette variable est  $Y^*$  est dans  $\mathcal{D}$ .

Par la suite, remarquons que  $\tilde{u}^n(y) = \tilde{u}(y)$  si et seulement si les supremums dans (3.38) et (3.45) sont identiques c-à-d  $0 < I(y) \leq n$  ce qui est équivalent

à  $y \geq U'(n)$  ( $\rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini). On en déduit d'une part par le lemme (3.4) que la suite  $(\tilde{U}^{n,-}(yZ_n))_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable ce qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^{n,-}(yZ_n)) = \mathbb{E}(\tilde{U}^-(yY^*)) \quad (3.47)$$

et d'autre part avec le lemme de Fatou

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^{n,+}(yZ_n)) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}^+(yY^*)). \quad (3.48)$$

D'après la convexité de  $\tilde{U}^n$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}^n(y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yZ_n)) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\tilde{U}^n(yZ_n)) \\ &\geq \mathbb{E}(\tilde{U}(yY^*)) \geq \tilde{u}(y). \end{aligned} \quad (3.49)$$

En combinant cette inégalité avec (3.46) on prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}^n(y) = \tilde{u}(y)$$

et donc (3.43). □

**Lemme 3.5.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.4 précédente, nous avons :*

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty$
- (ii)  $\lim_{y \rightarrow \infty} -\tilde{u}_y(y) = 0$ .

*Démonstration.* Par la relation de conjugaison (3.43) établie dans la proposition 3.4, on sait écrire, en notant par  $i = (u')^{-1}$ , que

$$\tilde{u}(y) = u(i(y)) - yi(i)$$

en dérivant par rapport à  $y$ ,

$$-\tilde{u}'(y) = i(y).$$

Il est facile de voir que cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned} -\tilde{u}'(y) &= \inf\{x : x \geq (u')^{-1}(y)\} \\ &= \inf\{x : u'(x) \leq y\}, \quad y > 0. \end{aligned}$$



De même et toujours en utilisant les résultats de la proposition 3.4, on montre que

$$u'(x) = \inf\{y : \tilde{u}'(y) \leq x\}, \quad \forall x > 0$$

ce qui montre bien que les assertions (i) et (ii) du lemme sont équivalentes. Il suffit alors de prouver (ii) pour conclure.

La fonction  $-\tilde{u}$  étant concave croissante d'après la proposition 3.3. Par conséquent sa dérivée au voisinage de l'infini ne peut être que finie,

$$-\tilde{u}'(\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{u}'(y) < +\infty.$$

Ceci d'une part mais d'autre part,  $-\tilde{U}$  est croissante telle que

$$-\tilde{U}(y) = I(y) \rightarrow_{y \rightarrow \infty} 0$$

donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon) \in \mathbb{R} :$

$$-\tilde{U}(y) \leq C(\varepsilon) + \varepsilon y, \quad \forall y > 0.$$

On déduit alors en appliquant le théorème de l'Hospital :

$$\begin{aligned} 0 \leq -\tilde{u}(\infty) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\tilde{u}(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}\left(\frac{-\tilde{U}(yY)}{y}\right) \\ &\leq \lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}\left(\frac{C(\varepsilon) + \varepsilon yY}{y}\right). \end{aligned}$$

Par la suite, puisque la variable  $\mathbb{1}$  (qui vaut 1 par tout) est dans  $\mathcal{C}(1)$ , et en utilisant la caractérisation duale

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \iff \mathbb{E}(XY) \leq x, \quad \forall Y \in \mathcal{D}$$

on déduit

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}\left(\frac{C(\varepsilon) + \varepsilon yY}{y}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{C(\varepsilon)}{y}\right) + \varepsilon$$

et finalement

$$0 \leq -\tilde{u}(\infty) \leq \lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{Y \in \mathcal{D}} \mathbb{E}\left(\frac{C(\varepsilon)}{y}\right) + \varepsilon = \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Par conséquent  $\tilde{u}(\infty) = 0$ . □

**Lemme 3.6.** Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses (1) et (2) et soit  $(y_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{R}_+$  convergeant vers  $y > 0$  telle que  $\tilde{u}(y_n) < \infty$  et  $\tilde{u}(y) < \infty$ . Alors  $Z^*(y_n)$  converge en probabilité vers  $Z^*(y)$  et  $\tilde{U}(y_n Z^*(y_n))$  converge dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  vers  $\tilde{U}(y Z^*(y))$ .

*Démonstration.* La preuve est construite sur un raisonnement par l'absurde. En effet, on suppose que  $Z^*(y_n)$  ne converge pas en probabilité vers  $Z^*(y)$ . Alors, il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon) > \varepsilon. \quad (3.50)$$

Par la suite, comme  $C(1)$  contient la fonction constante  $\mathbb{1}$  valant 1 partout, on obtient alors par caractérisation duale :

$$\mathbb{E}(Z^*(y_n) \mathbb{1}) = \mathbb{E}(Z^*(y_n)) \leq y_n$$

et  $\mathbb{E}(Z^*(y)) \leq y$ . D'autre part, on remarque d'après 3.50 que pour tout  $a \geq 1$ , on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \frac{\varepsilon}{a}\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon) > \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{a}.$$

Donc, on peut choisir  $\varepsilon$  aussi petit qu'on voudra, ainsi, on peut supposer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|Z^*(y_n) + Z^*(y)| \geq \frac{1}{\varepsilon}; |Z^*(y_n) - Z^*(y)| > \varepsilon\right) > \varepsilon. \quad (3.51)$$

On définit alors, pour  $n \geq 1$ , la suite

$$Z_n = \frac{1}{2} (Z^*(y_n) + Z^*(y)).$$

Par connexité de la fonction  $\tilde{u}$ , on a :

$$\tilde{U}(Z_n) \geq \frac{1}{2} \left( \tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y)) \right). \quad (3.52)$$

Mais, comme la fonction  $\tilde{U}$  est strictement convexe et par le fait qu'on a supposé que  $Z^*(y_n)$  ne converge pas en probabilité vers  $Z^*(y)$ , c-à-d. que l'inégalité (3.51) est satisfaite, on peut alors en déduire qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\tilde{U}(Z_n)\right) \leq \frac{1}{2} \left( \tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y)) - \delta \right) > \delta.$$

L'étape suivante est l'étude du terme  $\mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \right)$ , qu'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \right) &= \mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \mathbb{1}_{\{\tilde{U}(Z_n) \leq \frac{1}{2}(\tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y))) - \delta\}} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \mathbb{1}_{I_n^c} \right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

où on désigne par  $I_n^c$  l'ensemble complémentaire de

$$I_n = \left\{ \tilde{U}(Z_n) \leq \frac{1}{2} \left( \tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y)) \right) - \delta \right\}.$$

Or on peut décomposer le premier terme comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \mathbb{1}_{I_n} \right) &\leq \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{I_n} \frac{1}{2} \left( \tilde{U}(Z^*(y_n)) + \tilde{U}(Z^*(y)) \right) - \eta \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n)) \mathbb{1}_{I_n}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y)) \mathbb{1}_{I_n}) \right) - \eta \mathbb{P}(I_n) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n)) \mathbb{1}_{I_n}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y)) \mathbb{1}_{I_n}) \right) - \eta^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Par suite, d'après (3.52), on a

$$\mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \mathbb{1}_{I_n^c} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n)) \mathbb{1}_{I_n^c}) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y)) \mathbb{1}_{I_n^c}) \right). \quad (3.55)$$

Donc, en combinant les équations (3.54) et (3.55), on déduit à partir de l'équation (3.53) ce qui suit

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \tilde{U}(Z_n) \right) &\leq \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) + \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y))) \right) - \eta^2 \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{u}(y_n) + \tilde{u}(y)) - \eta^2. \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{u}$  étant convexe par définition, continue sur l'ensemble  $\{\tilde{u} < \infty\}$ , nous obtenons alors par passage à la limite supérieure

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) \leq \tilde{u}(y) - \eta^2.$$

En utilisant le lemme 3.3, on peut construire une suite  $K^n \in \text{Conv}(Z_n, Z_{n+1}, \dots)$ ,  $n \geq 0$  qui converge presque sûrement vers une variable  $K$ . Rappelons maintenant que  $Z^*(y_n) \in \mathcal{D}(y_n)$  et que par définition de  $Z_n$  :

$$Z_n = \frac{1}{2} (Z^*(y_n) + Z^*(y))$$

et par définition de  $\mathcal{D}(a) = a\mathcal{D}$ , on en déduit alors que  $Z_n \in \mathcal{D}(\frac{1}{2}(y_n + y)) = \frac{1}{2}(y_n + y)\mathcal{D}$ . En particulier, il existe une suite  $(y_n^K) \in \text{Conv}(y_n, y_{n+1}, \dots)$  qui converge à son tour vers  $y$  et tel que  $K_n \in \mathcal{D}(y_n^K)$ , c-à-d. pour tout  $X \in \mathcal{C}(x)$ , on a

$$\mathbb{E}(K^n X) \leq x y_n^K.$$

Donc, en passant à la limite inférieure et par le lemme de Fatou, nous obtenons que, pour tout  $X \in \mathcal{C}(x)$ ,

$$\mathbb{E}(KX) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(K^n X) \leq xy.$$

Ceci implique que  $K \in \mathcal{D}(y)$  et par convexité de  $\tilde{U}$  ajoutée au lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{U}(K)) &= \mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}^n\right) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(K^n)) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z)) \leq v(y) - \eta^2 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire à la définition de  $\tilde{u}(y)$ . On conclut alors que  $Z^*(y_n)$  converge en probabilité vers  $Z^*(y)$ . D'après le lemme 3.4, la suite  $\left(\tilde{U}(-Z^*(y_n))\right)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable et par conséquent  $\tilde{U}(Z^*(y_n))$  converge vers  $\tilde{U}(Z^*(y))$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{U}(Z^*(y_n))) = \tilde{U}(Z^*(y))$$

ce qui est une simple conséquence de la continuité de la fonction valeur  $\tilde{u}$  sur l'ensemble  $\{\tilde{u} < \infty\}$ .

Ceci achève la preuve. □

### 3.3.4 Élasticité asymptotique

Dans ce paragraphe nous introduisons la quantité dite Élasticité Asymptotique d'une fonction d'utilité définie par

$$AE(U) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U} \tag{3.56}$$

Cette quantité a été introduite pour la première fois par Kramkov et Schachermayer dans leur article [60]. Elle jouera un rôle très important dans toute la suite notamment dans la preuve d'un des deux résultats principaux de ce chapitre (théorème 3.6).

**Théorème 3.4.** *Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant l'hypothèse 3.3 et  $U(\infty) > 0$ . Alors l'infimum des réels  $\gamma > 0$  pour lesquels les assertions suivantes sont vraies est l'élasticité asymptotique de la fonction  $U$ .*

(i)  $\exists x_0 > 0$  et  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que :

$$xU'(x) < \gamma U(x), \quad \forall x \geq x_0$$

(ii)  $\exists x_0 > 0$  et  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que :

$$U(\lambda x) < \lambda^\gamma U(x) \quad \forall x \geq x_0, \quad \forall \lambda > 1$$

(iii)  $\exists y_0 > 0$  et  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que :

$$\tilde{U}(\lambda y) < \lambda^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \tilde{U}(y), \quad \forall 0 < \lambda < 1, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

(iv)  $\exists y_0 > 0$  et  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que :

$$-y\tilde{U}'(y) < \frac{\gamma}{1-\gamma} \tilde{U}(y), \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

De manière générale, une caractérisation de l'élasticité asymptotique est donnée par le résultat suivant

**Théorème 3.5.** *Soit  $U$  une fonction d'utilité vérifiant (3.8) et  $(U(\infty) > 0)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $AE(U) < 1$
- Il existe  $x_0 > 0$ ,  $\lambda > 1$  et  $c < 1$  telle que :

$$U(\lambda x) < c\lambda U(x), \quad \forall x > x_0.$$

- Il existe  $x_0 > 0$  telle que pour tout  $\lambda > 1$  il existe  $c < 1$  :

$$U(\lambda x) < c\lambda U(x), \quad \forall x > x_0.$$

- Il existe  $\exists y_0 > 0$ ,  $\zeta < 1$  et  $\alpha < +\infty$  telle que :

$$\tilde{U}(\zeta y) < \alpha \tilde{U}(y), \quad \forall y < y_0$$

– Il existe  $y_0 > 0$  telle que pour tout  $0 < \zeta < 1$  il existe  $\alpha < +\infty$  :

$$-y\tilde{U}'(y) < \frac{\gamma}{1-\gamma}\tilde{U}(y), \quad \forall y < y_0$$

**Lemme 3.7.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions concaves définies sur  $\mathbb{R}_+$ , telles que  $u(\infty) > \infty$  et  $v(\infty) > \infty$  et qu'il existe  $x_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  pour lesquels nous avons :

$$u(x) - C \leq v(x) \leq u(x) + C, \quad x \geq x_0.$$

Alors,

$$AE(u) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xu'(x)}{u(x)} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xv'(x)}{v(x)} = AE(v).$$

### Second résultat principal

Dans toute la suite, nous imposons la condition dite d'élasticité asymptotique raisonnable, introduite pour la première fois par Kramkov et Schachermayer [60] et qui consiste à supposer que l'élasticité asymptotique est strictement inférieure à 1, c-à-d

$$AE(U) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U} < 1. \quad (3.57)$$

Notons que cette hypothèse n'est en général pas satisfaite pour toutes les fonctions d'utilité, comme le montre l'exemple suivant :

#### Exemple 3.1.

1.  $U(x) = \ln(x) \implies AE(U) = 0.$
2.  $U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma \in ]0, 1[ \implies AE(U) = 1 - \gamma.$
3.  $U(x) = \frac{x}{\ln(x)} \implies AE(U) = 1.$

**Théorème 3.6.** En plus des hypothèses du théorème 3.3, on suppose que l'élasticité asymptotique de  $U$  est strictement inférieure à 1, c-à-d

$$AE(U) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

Alors en plus des assertions du théorème 3.3 on a :

- (i)  $\tilde{u}(y) < \infty$ , pour tous les  $y > 0$ . Les deux fonctions valeurs  $u$  et  $\tilde{u}$  sont continûment différentiables sur  $(0, \infty)$ .
- (ii) Les fonctions  $u'$  et  $-\tilde{u}'$  sont strictement décroissantes et
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$
  - $\lim_{y \rightarrow 0} -\tilde{u}'(y) = \infty$ .
- (iii) l'élasticité asymptotique, de la fonction valeur  $u$  du problème (3.7),  $AE(u)$  est inférieure ou égale à celle de la fonction  $U$ ,

$$AE(u) \leq AE(U) < 1.$$

- (iv) La solution optimale au problème primal (3.7)  $X_T^*$  existe et elle est unique et dans  $\mathcal{C}(x)$ . Si  $Z^* \in \mathcal{D}$  est la solution du problème dual (3.38), avec  $y = u'(x)$ , nous avons les relations de dualité

$$X_T^* = I(yZ^*), \quad Z^* = \frac{U'(X_T^*)}{u'(x)} \quad (3.58)$$

$$\mathbb{E}(X_T^* Z^*) = x. \quad (3.59)$$

- (v) On a les relations suivantes entre  $u'$ ,  $\tilde{u}'$  et  $X_T^{x,*}$ ,  $Z^*$ ,

$$u'(x) = \mathbb{E}\left(\frac{X_T^{x,*} U'(X_T^{x,*})}{x}\right)$$

$$\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}\left(\frac{y Z^* \tilde{U}'(y Z^*)}{y}\right).$$

Dans le travail [60] paragraphe 5, Kramkov et Schachermayer fournissent des contre-exemples dans lesquels, si l'élasticité asymptotique est égale à 1, l'infimum dans le problème dual (3.38) n'est pas atteint.

Une deuxième fois, la démonstration de ce théorème nécessite plusieurs étapes sous forme de différents lemmes et propositions.

**Lemme 3.8.** *On se place sous les hypothèses du théorème 3.6, et on considère une suite positive  $(y_n)_{n \geq 1}$  qui converge vers  $y > 0$ . Alors la suite  $y_n Z^*(y_n) \tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$  converge vers  $y Z^*(y) \tilde{U}'(y Z^*(y))$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 3.6, la suite  $y_n Z^*(y_n)$  converge en probabilité vers  $y Z^*(y)$ , par continuité de  $\tilde{U}'$  on en conclut que  $y_n Z^*(y_n) \tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$  converge vers  $y Z^*(y) \tilde{U}'(y Z^*(y))$  en probabilité.

Donc, pour prouver ce lemme, il suffit de montrer l'uniforme intégrabilité de la suite  $y_n Z^*(y_n) \tilde{U}'(y_n Z^*(y_n))$ . Cette preuve est basée essentiellement sur l'hypothèse,

$$AE(U) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

En effet, d'après le théorème 3.4 (iv), ceci implique l'existence d'un réel  $y_0 > 0$  et d'une constante  $C < \infty$  tel que :

$$-\tilde{U}'(y) < C \frac{\tilde{U}(y)}{y}, \quad \text{pour } 0 < y < y_0$$

ce qui implique, en remplaçant  $y$  par  $y_n Z^*(y_n)$ ,

$$-\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n)) y_n Z^*(y_n) < C \tilde{U}(y), \quad \text{pour } 0 < y_n Z^*(y_n) < y_0$$

et donc la suite  $(\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n)) y_n Z^*(y_n) \mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n) < y_0\}})_{n \geq 1}$  est dominée en valeur absolue par la suite  $C(|\tilde{U}(y_n Z^*(y_n))| \mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n) < y_0\}})_{n \geq 1}$  qui par le lemme 3.6 est uniformément intégrable.

En ce qui concerne la suite  $(\tilde{U}'(y_n Z^*(y_n)) y_n Z^*(y_n) \mathbb{1}_{\{y_n Z^*(y_n) \geq y_0\}})_{n \geq 1}$ , l'uniforme intégrabilité est obtenue, comme dans la preuve du lemme 3.4 en remarquant que  $(y_n Z^*(y_n))_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  et que  $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{U}'(y) = 0$ .  $\square$

**Remarque 3.5.** Si en plus des hypothèses du lemme précédent on considère une deuxième suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  qui converge vers 1, alors on peut conclure de la même manière que la suite  $(\tilde{U}'(\gamma_n y_n Z^*(y_n)) y_n Z^*(y_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $\tilde{U}'(y Z^*) y Z^*$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ . Il suffit de remarquer, toujours par le lemme 3.4 que, pour  $\gamma \in ]0, 1[$  fixé on peut trouver une constante  $C' < \infty$  et un  $y_0 > 0$  tel que :

$$-\tilde{U}'(\gamma y) < C' \frac{\tilde{U}(y)}{y}, \quad \text{pour } 0 < y < y_0$$

On intègre ceci dans la preuve ci-dessus et on obtient le résultat voulu.

**Lemme 3.9.** Sous les hypothèses du théorème 3.6, la fonction valeur du problème dual  $\tilde{u}$  est finie et continûment différentiable dans  $(0, +\infty)$ , sa dérivée  $\tilde{u}'$  est strictement croissante et satisfait :

$$-y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \quad (3.60)$$



*Démonstration.* Commençons par remarquer que si la limite  $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1}$  existe bien, alors elle vaut  $-y\tilde{u}'(y)$ . C'est pour cette raison qu'on va s'intéresser dans la suite aux deux quantités

$$\limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} \text{ et } \liminf_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1}.$$

L'idée est alors de montrer qu'on a les deux inégalités suivantes :

$$\limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} \leq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y)))$$

et

$$\liminf_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} \geq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y)))$$

car ceci nous permettra alors, en notant par  $\tilde{u}'_r$  la dérivée à droite de  $\tilde{u}$ , de déduire que

$$-y\tilde{u}'_r(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))).$$

En utilisant le lemme 3.8, on conclut que la fonction  $y \mapsto \tilde{u}'_r$  est continue, donc par convexité de  $\tilde{u}$  ceci implique que  $\tilde{u}$  est continûment différentiable.

Dans l'intention d'établir ces deux dernières inégalités, on écrit :

$$\limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} \leq \limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} \mathbb{E} \left[ \tilde{U}(yZ^*(\gamma y)) - \tilde{U}(\gamma yZ^*(\gamma y)) \right]$$

par suite, puisque  $\tilde{U}$  est strictement croissante et  $\gamma > 1$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} \limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} &\leq \limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} \mathbb{E} \left[ \tilde{U}(yZ^*(\gamma y)) - \tilde{U}(\gamma yZ^*(\gamma y)) \right] \\ &\leq \limsup_{\gamma \searrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \gamma y Z^*(\gamma y) \tilde{U}'(yZ^*(\gamma y)) \right] \\ &\leq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Par le même raisonnement on a,

$$\begin{aligned} \liminf_{\gamma \searrow 1} \frac{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\gamma y)}{\gamma - 1} &\geq \liminf_{\gamma \searrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} \mathbb{E} \left[ \tilde{U}(yZ^*(y)) - \tilde{U}(\gamma yZ^*(y)) \right] \\ &\geq \liminf_{\gamma \searrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} \mathbb{E} \left[ (\gamma - 1) y Z^*(y) \tilde{U}'(\gamma yZ^*(y)) \right] \\ &\geq \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Finalement on déduit que  $\tilde{u}'$  est continue, et puisque  $\tilde{u}$  est strictement convexe par le théorème 3.3 et  $\tilde{u}$  est strictement croissante. De plus par le même théorème,  $u'$  est l'inverse de  $-\tilde{u}$  ceci implique, d'après le lemme 3.9, que  $u'$  est continue strictement décroissante.  $\square$

**Lemme 3.10.** (*Caractérisation de la solution primale*)

*On suppose, sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.6, que  $x$  et  $y$  sont reliés par l'identité  $x = -\tilde{u}'(y)$ . Alors  $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y))$  est l'unique solution au problème primal (3.29).*

*Démonstration.* Commençons par démontrer que cette variable  $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y))$  est bien dans l'espace  $\mathcal{C}(x)$ . D'après la caractérisation duale (3.37), il est suffisant de montrer que, pour tout  $Z \in \mathcal{D}$ , on a

$$\mathbb{E}(yZI(yZ^*(y))) \leq yx = -y\tilde{u}'(y) = \mathbb{E}(yZ^*(y)I(yZ^*(y))) \quad (3.63)$$

où la dernière égalité est due au précédent lemme.

Pour  $Z \in \mathcal{D}$  et  $\delta \in (0, 1)$  nous définissons la nouvelle variable

$$Z_\delta = (1 - \delta)Z^*(y) + \delta Z$$

ensuite, comme  $\tilde{U}$  est croissante et  $\tilde{U}' = I$  est décroissante, on déduit d'un coté,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ_\delta)) - \mathbb{E}(y\tilde{U}(yZ^*(y))) = \mathbb{E}\left(\int_{yZ_\delta}^{yZ^*(y)} I(z)dz\right) \\ &\leq \mathbb{E}(I(yZ_\delta)y(Z_\delta - Z^*(y))) \end{aligned} \quad (3.64)$$

on déduit

$$\mathbb{E}(I(yZ_\delta)yZ^*(y)) \geq \mathbb{E}(I(yZ_\delta)yZ) \quad (3.65)$$

et encore une fois par la décroissance de  $I$ ,

$$\mathbb{E}(I(y(1 - \delta)Z^*(y))yZ^*(y)) \geq \mathbb{E}(I(yZ_\delta)yZ) \quad (3.66)$$

d'après la remarque 3.5,

$$\mathbb{E}(I(y(1 - \delta)Z^*(y))yZ^*(y)) \leq \infty \quad (3.67)$$

donc on peut, par la suite, appliquer le théorème de convergence dominé pour le terme de gauche dans (3.66), et le lemme de Fatou pour le lemme de droite.

On montre alors (3.63) c-à-d  $X_T^{x,*} = I(yZ^*(y)) \in \mathcal{C}(x)$ .

Prouvons maintenant l'optimalité de  $I(yZ^*(y))$  :

Pour tout  $X \in \mathcal{C}(x)$  on a :

$$\mathbb{E}(XZ^*(y)) \leq x, \quad U(X) \leq \tilde{U}(yZ^*(y)) + XyZ^*(y)$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X)) &\leq \tilde{u}(y) + xy = \mathbb{E}(\tilde{U}(yZ^*(y)) + yZ^*(y)I(yZ^*(y))) \\ &= \mathbb{E}(U(I(yZ^*(y)))) = \mathbb{E}(U(X_T^{x,*})) \end{aligned}$$

d'où le résultat. En ce qui concerne l'unicité de cette solution, c'est une simple conséquence de la stricte concavité de  $U$ . □

**Lemme 3.11.** *Supposons que la fonction d'utilité  $U$  satisfait les hypothèses 3.2, 3.3 et*

$$AE(U) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

*Alors l'élasticité asymptotique de la fonction valeur  $u$  est inférieure ou égale à celle de  $U$ , c-à-d :*

$$AE(u) \leq AE(U) < 1.$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma > \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)}$ . D'après le théorème 3.4 (iii), l'hypothèse  $AE(U) < 1$  est équivalente à :

$$\exists x_0 > 0 : \quad U(\lambda x) < \lambda^\gamma U(x) \quad \forall x \geq x_0, \quad \forall \lambda > 1 \quad (3.68)$$

donc si on montre

$$\exists x_1 > 0 : \quad u(\lambda x) < \lambda^\gamma u(x) \quad \forall x \geq x_1, \quad \forall \lambda > 1 \quad (3.69)$$

alors, par le théorème 3.4, on déduit que

$$AE(u) \leq \gamma$$

et, en faisant tendre  $\gamma \rightarrow AE(U)$ , nous obtenons le résultat désiré. Donc il suffit de prouver (3.69) pour conclure.

Supposons d'abord que (3.68) est vraie pour tout  $x > 0$  et pour tout  $\lambda > 1$ , alors ceci implique

$$u(\lambda x) = \mathbb{E}(U(X_T^{\lambda x})) \leq \mathbb{E}(\lambda^\gamma U(\frac{X_T^{\lambda x}}{\lambda})) \leq \lambda^\gamma u(x)$$

d'où le fait que (3.69) est vraie pour tout  $x > 0$  et pour tout  $\lambda > 1$ .

Revenons maintenant à notre cadre où (3.68) n'est vraie que pour  $x \geq x_0$ . L'idée est de remplacer  $U$  par une deuxième fonction  $V$  pour laquelle (3.69) est vraie. Pour tout  $x > 0$ , cette fonction est définie par :

$$V(x) = \begin{cases} c_1 \frac{x^\gamma}{\gamma} & x \leq x_0 \\ c_2 + U(x) & x \geq x_0 \end{cases}$$

où les deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont choisies telles qu'on la continuité de  $V$  et sa dérivé  $V_x$  en  $x_0$  c-à-d

$$c_1 x_0^{\gamma-1} = U'(x_0) \quad \text{et} \quad c_1 \frac{x_0^\gamma}{\gamma} = c_2 + U(x_0).$$

Maintenant que la fonction  $V$  vérifie (3.68) pour tout  $x > 0$ , on sait, d'après ce qui précède, que la fonction valeur associée  $v$  satisfait, à son tour, (3.69)  $\forall x > 0$ . Par la suite il est facile de voir qu'il existe une constante  $K$  tel que

$$U(x) - K \leq V(x) \leq U(x + x_0) + K, \quad \forall x > 0$$

ce qui implique

$$u(x) - K \leq v(x) \leq u(x + x_0) + K$$

et en particulier il existe une nouvelle constante  $C$  et un  $x_2 > 0$  tel que

$$u(x) - C \leq v(x) \leq u(x) + C$$

et on conclut alors par le lemme 3.7 que  $AE(u) \leq AE(v) \leq \gamma$ , ce qui achève la démonstration. □

Le résultat suivant prouve que si l'élasticité asymptotique d'une fonction d'utilité est inférieure strictement à 1 alors les hypothèses 3.3 et 3.4 sont satisfaites.

**Lemme 3.12.** *Supposons que l'élasticité asymptotique de la fonction  $U$  est inférieure strictement à 1 alors les hypothèses 3.3 et 3.4 sont satisfaites.*

*Démonstration.* Divisant par  $\lambda x$  dans (ii) du théorème 3.4 il s'ensuit, pour tout  $\gamma$  vérifiant les assertions ci-dessus,

$$\frac{U(\lambda x)}{\lambda x} < \lambda^{\gamma-1} \frac{U(x)}{x} \quad \forall x \geq x_0, \quad \forall \lambda > 1$$

ou encore de manière équivalente, en remplaçant  $\lambda x$  par  $x'$  et  $x$  par  $x_0$ ,

$$\frac{U(x')}{x'} < (x')^{\gamma-1} (x_0)^{-\gamma} U(x_0) \quad \forall x' \geq x_0$$

donc si l'élasticité asymptotique de  $U$  est strictement inférieure à 1, d'après ce dernier théorème il existe  $\gamma < 1$  pour la quelle l'inégalité ci-dessus est encore vraie. On déduit alors en passant à la limite supérieure,

$$\limsup_{x' \rightarrow +\infty} \frac{U(x')}{x'} \leq 0$$

ce qui prouve que l'hypothèse 3.4 est satisfaite.

De plus, en divisant par  $xU(x)$  dans (i) du théorème 3.4 et en intégrant en  $x$ , il existe une constante  $c_1$  tel que

$$\log(U(x)) < c_1 + \gamma \log(x), \forall x \geq x_0$$

ce qui est encore équivalent à

$$U(x) < c + c' x^\gamma, \forall x \geq x_0$$

Avec  $c$  et  $c'$  sont des constantes. D'où l'hypothèse 3.3. □

## 3.4 Appendice

Ce premier résultat bien connu a été prouvé par Komlos [58]

**Théorème 3.7.** (*Théorème de Komlos*)

Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires bornée dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ . Alors il existe une sous-suite  $(Y_{n_k})_{k \geq 1}$  et une variable aléatoire  $Y$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  telle que la somme

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{n_i} \rightarrow Y \quad \text{p.s. quand } k \rightarrow +\infty.$$

Un deuxième théorème très important qu'on a beaucoup utilisé dans les preuves des principaux résultats de ce chapitre est le théorème de compacité suivant :

**Théorème 3.8.** Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires dans  $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ . Alors il existe une deuxième suite  $\tilde{Y}_n \in \text{Conv}(Y_n, Y_{n+1}, \dots)$  qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $\tilde{Y}$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ .

Le théorème qui suit prouve la fermeture de l'ensemble  $\mathcal{C}(x)$  défini dans (3.27).

**Théorème 3.9.** L'ensemble  $\mathcal{C}$  est fermé pour la topologie de la convergence en mesure, c-à-d. si  $(X^n)_{n \geq 0}$  est une suite de  $\mathcal{C}(x)$  convergant p.s. vers  $X^*$ , alors  $X^* \in \mathcal{C}(x)$ .

Ce théorème est très utile comme on l'a vu dans les démonstrations précédentes et de manière générale pour prouver des résultats d'existence dans les problèmes d'optimisation en finance. Il a été prouvé par Schachermayer ( voir aussi l'appendice Delbaen et Schachermayer [17].

**Théorème 3.10.** (*Théorème de La Vallée-Poussin*)

Soit  $(Y_n)_{n \in I}$  une suite de variables aléatoires. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes,

- (a)  $(Y_n)_{n \in I}$  est uniformément intégrable.
- (b) Il existe une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ , positive,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  et telle que

$$\sup_{n \in I} \mathbb{E}(f(|Y_n|)) < +\infty$$

Un dernier résultat que nous avons utilisé dans la preuve du théorème 3.1,

**Théorème 3.11.** *Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires positives bornées dans  $L^1$ , convergent p.s. vers une variable aléatoire  $X^*$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X^*) + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe une sous suite  $(X_{\phi(n)})_{n \geq 0}$  et une suite d'ensembles  $(B_{\phi(n)})_{n \geq 0}$  deux à deux disjoints de  $(\Omega, \mathcal{F})$  telles que*

$$\mathbb{E}(X_{\phi(n)} \mathbb{1}_{B_{\phi(n)}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}, n \geq 0$$

**Théorème 3.12.** *(Théorème min-max) Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel normé et compact pour la topologie faible  $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ . Soient  $\mathcal{X}$  un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{E}$  et  $\mathcal{Y}$  un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel. Considérons une fonction  $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant :*

- (1)  $x \rightarrow f(x, y)$  est continue et concave sur  $\mathcal{X}$  pour tout  $y \in \mathcal{Y}$ .
- (2)  $y \rightarrow f(x, y)$  est convexe sur  $\mathcal{Y}$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$

Alors on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y) = \inf_{y \in \mathcal{Y}} \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x, y). \quad (3.70)$$

Voir [104] pour la démonstration de ce théorème.

# Deuxième partie

## Utilités progressives





# Chapitre 4

## Utilités progressives dynamiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction et Motivations . . . . .</b>	<b>128</b>
4.1.1	Les utilités classiques et l'univers d'investissement	129
4.1.2	Banque d'investissement et intertemporalité . .	130
<b>4.2</b>	<b>Utilités progressive . . . . .</b>	<b>132</b>
4.2.1	L'environnement . . . . .	132
4.2.2	Définition de l'utilité progressive . . . . .	134
4.2.3	Interprétation . . . . .	135
<b>4.3</b>	<b>Exemples simples d'utilités . . . . .</b>	<b>137</b>
4.3.1	Exemple 1 : Changement de prix d'état dans une utilité classique . . . . .	138
4.3.2	Exemple 2 : Utilité classique, changement de pro- babilité et changement de numéraire . . . . .	143
4.3.3	Dynamique de l'utilité progressive $u$ . . . . .	147

---

*Résumé : Dans ce chapitre nous discutons de quelques problématiques et incohérences dans les problèmes d'optimisation de portefeuille étudiés dans les chapitres 2 et 3. Nous discutons essentiellement des questions d'intertemporalité, de maturités multiples et de cohérence avec l'univers d'investissement. Pour répondre à ces interrogations, il s'avère que la seule alternative est de considérer*

*des utilités dynamiques indépendantes de l'horizon d'investissement. Nous nous intéressons très particulièrement à des utilités dites progressives ou encore des utilités forward, introduites pour la première fois par Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulou en 2002 [84]. L'avantage de ces utilités ainsi que des richesses optimales associées est qu'elles sont indépendantes de tout horizon d'investissement et s'adaptent au mieux avec le marché financier.*

*Dans ce chapitre, nous considérons une définition des utilités progressives légèrement différente de celle de Zariphopoulou. Nous donnons ensuite quelques exemples simples de ces utilités à l'aide de certains outils, à la fois simples et efficaces, basés sur le changement de numéraire ainsi que le changement de probabilités. Ces exemples d'utilités que nous proposons d'étudier sont par définition croissantes strictement concaves. Nous montrons alors que, malgré leur simplicité, il est difficile de vérifier la condition de compatibilité avec l'univers d'investissement (une condition nécessaire dans la définition 4.3 de ces utilités progressives).*

*Enfin, nous montrons que ces utilités dynamiques vérifient une équation aux dérivées partielles stochastiques (4.32) de second ordre complètement non linéaire que nous allons retrouver dans un cadre beaucoup plus général.*

## 4.1 Introduction et Motivations

Nous avons étudié dans les chapitres 1 et 2 les problèmes d'optimisation de portefeuille par deux méthodes qui sont essentiellement les suivantes :

- La première consiste à utiliser des techniques d'équations aux dérivées partielles. Ainsi nous avons montré que la fonction valeur est solution (solution de viscosité) de l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.34). Nous avons aussi obtenu la formule exacte du portefeuille optimal.
- La deuxième méthode est basée sur les techniques de dualité dont nous avons montré la réelle efficacité. En effet, nous avons vu, dans le chapitre 3 basé essentiellement sur les résultats de D. Kramkov et W. Schachermayer [60] et ceux de I.Karatzas et S.Shreve [55], que le fait de considérer

le problème dual nous a beaucoup aidé d'une part à mieux comprendre le problème primal et d'autre part à prouver l'existence d'un portefeuille optimal et ce en prouvant d'abord sous l'hypothèse d' " élasticité asymptotique strictement inférieure à 1 " l'existence d'une martingale locale optimale au problème dual, ainsi qu'une caractérisation duale de ces deux optimums, l'identité (3.58), et une relation de conjugaison entre les deux fonctions valeurs, dans les théorèmes 3.3 et 3.6.

Mais dans l'une ou l'autre de ces deux méthodes aussi intéressantes et puissantes qu'elles soient, il est très difficile de spécifier la fonction valeur, à l'exception de quelques exemples markoviens ainsi que des cas particuliers des utilités exponentielles, puissances et logarithmiques. De plus, cette fonction valeurs s'avère loin d'être intuitive et elle est en général assez compliquée à interpréter.

#### 4.1.1 Les utilités classiques et l'univers d'investissement

Les utilités *classiques* sont choisies sans rapport avec l'univers d'investissement.

En effet, dans ce même cadre *classique*, si l'investisseur a fixé son utilité, donc son aversion au risque, en  $t = 0$  pour la date  $T$ , une fois sa stratégie optimale établie, pour les cinq ans à venir par exemple, il n'aura en pratique qu'à suivre cette stratégie jusqu'à la maturité. Donc le portefeuille ainsi construit à une date intermédiaire, par exemple deux ans, dépend non seulement de l'horizon mais surtout d'un choix que l'investisseur a fait il y a deux ans, ne tenant pas compte du nouvel état du marché à une telle date intermédiaire, un marché financier qui ne cesse d'évoluer de manière très significative, et ne tenant pas compte des contraintes d'investissements imposées à cet agent. En particulier, ceci n'est pas cohérent avec les périodes de crises assez fréquentes ces dernières années et qui peuvent influencer de manière importante les choix et les préférences de tout agent par rapport à des produits qui deviennent beaucoup trop risqués ou plus rentables. L'investisseur se retrouve alors prisonnier de sa propre stratégie. D'un autre côté, il n'est pas cohérent de représenter ses préférences dans un tel marché très dynamique par une simple fonction déterministe indépendante en général du temps.

Pour pouvoir remédier à cette incohérence, il est très important que nous puissions avoir un degré de liberté de plus qui permettra de changer de stratégie si nécessaire et surtout réajuster l'utilité de l'agent si ses préférences changent au cours du temps. Pour ce, il est plus naturel de considérer des utilités *stochastiques* et *dynamiques*.

### 4.1.2 Banque d'investissement et intertemporalité

La question que nous posons ici est la question d'un agent qui choisit d'investir sa richesse initiale dans des produits financiers de différentes maturités et tente de d'identifier sa stratégie optimale par critère d'utilité espérée. Le problème qui se pose est, alors, comment cet agent définit son utilité ? Doit-elle être la même pour les différents horizons d'investissement ou non ?

Pour mieux comprendre les difficultés que nous pouvons rencontrer dans ce genre de problème, nous considérons les deux cas de figure suivants :

- i) Un agent financier, ayant construit son portefeuille optimal  $X_T^{x,*}$  jusqu'à la date  $T$  à l'aide d'une fonction d'utilité  $U$ , décide de redémarrer son investissement pour un horizon  $T_1$  avec comme richesse initiale  $X_T^{x,*}$  et ce en considérant une nouvelle utilité  $U_1$ . Une fois son portefeuille reconstitué et sa stratégie optimale établie, il réalisera ainsi la richesse  $X_{T_1}^{X_T^{x,*},*}$ .
- ii) L'investisseur choisit dès la date 0 la maturité  $T+T_1$  comme horizon à son investissement. Nous notons par  $\hat{U}$  sa fonction d'utilité. Par conséquent, il réalisera à cette maturité la richesse  $\hat{X}_{T+T_1}^{x,*}$ .

Dans le premier scénario, la fonction valeur de l'investisseur à un instant  $t \leq T$  est déterminée à la fois par le problème d'optimisation de portefeuille associé à  $U$  sur  $[0, T]$  et par celui associé à  $U_1$  entre  $T$  et  $T_1$ , alors que dans le second scénario, la fonction valeur de l'investisseur est donnée par le programme d'optimisation sur la période  $[0, T + T_1]$  et dont la fonction d'utilité est  $\hat{U}$ .

Si le choix des utilités à différentes maturités dans ces deux cas est cohérent, alors le fait de s'arrêter à une date intermédiaire puis de reprendre les investissements ne doit, en aucun cas, générer ni des fonctions valeurs différentes ni des

richesses optimales différentes. En effet, deux fonctions valeurs différentes (donc des satisfactions différentes pour un même gain) ou des richesses optimales différentes ne peuvent correspondre aux mêmes préférences d'un seul agent. Cela signifie aussi que si nous décidons d'arrêter d'investir à une date intermédiaire  $T_I$  quelconque, nous sommes certains que la richesse réalisée à cette date est encore optimale, dans le sens où elle coïncide avec celle que nous aurions pu réaliser si nous avions considéré le problème d'optimisation de portefeuille à horizon  $T_I$ . En d'autres termes, la richesse optimale ne doit pas dépendre de l'horizon d'investissement. Or, en général, ceci n'est pas le cas pour la raison suivante : du fait que l'utilité est déterministe et ne tient pas compte de l'évolution du marché, l'agent n'a pas le même point de vue sur sa fonction d'utilité dans sept ans que celui qu'il aura dans cinq ans pour une maturité de deux ans, c-à-d que son utilité pour les sept années à venir n'intègre pas l'évolution du marché et des préférences dans cinq ans.

Ceci n'est pas l'unique exemple de situations où nous pouvons être confrontés à la question des maturités différentes. En effet, prenons le cas d'une *banque d'investissement* dont une part importante de l'activité vise à trouver les placements financiers et les couvertures les plus rentables pour ses clients. Comme les fonds d'investissement s'attendent en général à un retour rapide sur investissement et à un rendement maximal, la banque prend des risques importants sur le court et le moyen terme pour répondre aux exigences de ses clients. Pour se couvrir contre tous ces risques, il est naturel de prendre position sur du long terme car un investisseur obtient plus de rendement sur ce genre de stratégies. Dans ce cadre de banque d'investissement, le gestionnaire utilise donc des stratégies à plusieurs horizons : court, moyen et long terme dans un même portefeuille. Qu'elle est alors la stratégie optimale pour cet investisseur ? Comment doit-il choisir sa fonction d'utilité ? Est-elle la même pour toutes les maturités ?

La réponse à cette question est clairement non. Nous espérons toujours réaliser un meilleur rendement sur du long terme que sur du court terme. De plus d'après ce qui précède les stratégies et les fonctions valeurs ne doivent pas trop dépendre de la maturité. Cependant ceci ne justifie pas le choix d'une même utilité pour différentes maturités, car certainement le fait de considérer une unique fonction d'utilité pour tous les horizons peut être une alternative pour répondre à la

question d'intertemporalité, mais en aucun cas, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, cette fonction déterministe peut intégrer l'évolution d'un marché très dynamique ni représenter les préférences d'un agent qui ne cessent à leur tour de changer selon l'état de ce marché.

Cette discussion, basée sur un raisonnement intuitif, va considérablement motiver l'intérêt que nous portons dans ce travail aux utilités stochastiques. En effet celles-ci se présentent comme une alternative aux utilités classiques permettant de mieux intégrer l'évolution du marché et les préférences d'un agent représentatif; elles permettent ainsi de répondre aux problématiques exposées ci-dessus et dans le chapitre précédent. Nous allons plus particulièrement nous intéresser au concept des utilités stochastiques dites *utilités progressives* ou encore *progressive performances*, une notion développée sous le nom de "forward utilities" et "forward performances", par Zariphopoulou et Musiela dans [84],[89],[85], [86], [92], [113], [87],[88] et étudiée par Tehranchi et al. dans [36] et très récemment par Zitkovic dans [115].

## 4.2 Utilités progressive

Avant de définir les utilités progressives proprement dites, nous décrivons le marché dans lequel les stratégies de l'investisseur prennent place; cet univers d'investissement jouera un rôle important dans la suite.

### 4.2.1 L'environnement

#### Univers d'investissement

Dans toute la suite, un espace de probabilité de type brownien est donné. Plus précisément, on considère un mouvement brownien standard de dimension  $d : W = (W_1, W_2, \dots, W_d)$ , défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour simplifier, nous supposons que  $\mathcal{F}_t$  coïncide avec la filtration générée par le mouvement brownien, c-à-d  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$  rendue continue à droite et complète.

Le marché financier lui-même est caractérisé comme d'habitude par le taux court terme  $r_t$ , le vecteur des primes de risque  $\eta_t$  associées aux sources de risque

$W$ , que nous supposons généralement mesurables et bornés.

Les stratégies de portefeuille  $\pi$  conduisent à des processus de richesse satisfaisant la contrainte d'autofinancement :

$$dX_t^{x,\pi} = r_t X_t^{x,\pi} dt + \pi_t \sigma_t (dW_t + \eta_t dt), \quad X_0^{x,\pi} = x \quad (4.1)$$

où  $x$  désigne le capital initial, et  $\sigma$  la matrice de volatilité des actifs, supposée mesurable non-singulière et bornée en  $(t, \omega)$ . Son inverse  $\sigma_t^{-1}(\omega)$  est supposée aussi uniformément bornée en  $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ . Notons que cette écriture où  $\pi$  décrit le montant investi dans les actifs risqués suppose implicitement que la richesse est toujours positive.

Les investisseurs sont souvent restreints dans leur choix d'investissement  $\pi$ , qui doivent appartenir à un cône convexe éventuellement aléatoire, noté par  $\mathcal{K}$ . Ses sections temporelles sont adaptées et notées  $\mathcal{K}_t$ . Par exemple, le cas où  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel exprime que seulement un nombre limité ( $< d$ ) d'actifs (ou de portefeuilles d'actifs) sont accessibles au gestionnaire. C'est une manière de d'exprimer l'incomplétude du marché.

Nous préciserons au fur à mesure les hypothèses d'intégrabilité sur les portefeuilles et la richesse associée, ainsi que sur la forme de l'espace des contraintes.

### Concavité de l'utilité

Avant de définir les utilités *progressives*, il est important de rappeler quelques notions de bases sur les préférences et l'aversion au risque étudiées en détail dans le premier chapitre. Pour cela, considérons une variable aléatoire discrète  $X$  prenant les valeurs  $x_i$  avec la probabilité  $p_i$  ; son espérance est donnée par  $\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i x_i = \bar{x}$ . Comme  $\bar{x}$  représente le gain espéré en jouant à une loterie décrite par le couple  $(X, (p_i))$ , il est logique de préférer le gain sûr  $\bar{x}$  au gain aléatoire  $X$ , en d'autres termes nous préférons l'espérance du gain au gain aléatoire. Par conséquent nous attribuons au gain  $\bar{x}$  une utilité espérée supérieure à celle que nous attribuons à la variable  $X$ , c-à-d

$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_i p_i U(x_i) \leq U(\bar{x}) \quad (4.2)$$

Ce raisonnement étant valable pour toute variable aléatoire  $X$  et à tout instant  $t$  (fixé), l'inégalité de (4.2) est satisfaite pour toute variable  $X$ , ce qui implique



que  $U(t, \cdot)$  est une fonction concave (à  $t$  fixé). En outre, le fait d'être sensible au niveau de la richesse se traduit par la stricte monotonie des utilités, c-à-d  $U(x) > U(x')$  pour  $x > x'$ .

Donc il est tout à fait naturel d'imposer cette propriété comme une propriété nécessaire que doit satisfaire tout processus  $u$  destiné à représenter les préférences d'un agent sur un marché financier. C'est la raison de l'utilisation d'un critère d'utilité espérée dans le cas classique.

Ici on cherche à distinguer le risque à la date  $t$ , pour lequel on tirerait une richesse aléatoire  $\mathcal{F}_t$  mesurable, d'espérance conditionnelle  $x$  à la place de  $x$ . C'est différent de regarder l'impact de l'utilité pour un risque futur, qui est plus lié à la programmation dynamique et à l'univers d'investissement.

### 4.2.2 Définition de l'utilité progressive

Rappelons d'abord la définition d'une fonction d'utilité puis celle d'un portefeuille admissible.

**Définition 4.1.** *On appelle utilité classique toute fonction  $U$  strictement concave croissante.*

**Définition 4.2.** *Un vecteur  $\pi \in \mathbb{R}^d$  est un portefeuille  $\mathcal{K}$ - admissible pour une richesse initiale  $x$ , c-à-d que  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ , si le processus de richesse  $X^{x, \pi}$  donné par (5.4) est tel que*

$$X_t^{x, \pi} \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

*presque sûrement, et si*

$$\pi_t \in \mathcal{K}_t, \quad \forall t \geq 0, \quad p.s.$$

*Les ensembles  $\mathcal{A}(\mathcal{K})$  et  $\mathcal{A}$  sont définis de manière identique à 2.2.*

La définition des utilités *progressives* associées à l'univers d'investissement décrit au début de cette section est légèrement différente de celle introduite par Musiela et Zariphopoulou [89, 85, 84] dans le sens où les portefeuilles que nous considérons dans notre définition et dans toute la suite sont des portefeuilles non actualisés. Cette différence ne change pas les assertions de la définition et peut paraître peu importante mais elle jouera un rôle crucial dans la question des

changements de numéraires que nous aborderons dans les exemples qui suivent et sera approfondie dans le chapitre 6 de ce manuscrit.

**Définition 4.3.** *Nous appelons utilité progressive, définie sur l'espace filtré  $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  issue de la fonction d'utilité standard  $U$ , tout champ aléatoire  $\mathcal{F}$ -ment mesurable, et continu  $u : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto u(t, x)$  vérifiant*

*i) **Propriété de concavité :** Pour tout  $(t, \omega)$ ,  $x \mapsto u(t, \omega, x)$  est une utilité classique, strictement croissante et strictement concave. A l'instant 0,  $u(0, \omega, x) = U(x)$ .*

*ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** pour toute stratégie admissible  $\pi \in \mathcal{K}$ , de richesse  $X^\pi$ ,*

$$\mathbb{E}(u(t, X_t^\pi) / \mathcal{F}_s) \leq u(s, X_s^\pi), \quad \forall t \geq s \geq 0. \quad (4.3)$$

*En d'autres termes, pour toute stratégie d'investissement admissible,  $(u(t, X_t^\pi); t \geq 0)$  est une surmartingale locale.*

*iii) **Existence d'un optimum :** Pour toute richesse initiale  $x$ , il existe une stratégie admissible, notée  $\pi^* \in \mathcal{K}$ , de processus de richesse  $X^{x, \pi^*}$  telle que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{x, \pi^*}) / \mathcal{F}_r) = u(r, X_r^{x, \pi^*}), \quad \forall t \geq r \geq 0. \quad (4.4)$$

*En d'autres termes,  $u(t, X_t^{x, \pi^*})$  est une martingale continue.*

### 4.2.3 Interprétation

#### ✓ Consistance avec l'univers d'investissement

Cette propriété explique que si  $\pi$  n'est pas la stratégie optimale, alors il vaut mieux ne pas faire d'investissement : soit on est optimal soit on n'a pas intérêt à investir. Il faut comprendre cette propriété comme suit : le fait qu'un investisseur fasse un investissement qui n'est pas optimal comparé avec ce qu'il aurait pu gagner s'il avait suivi la bonne stratégie correspondante à ses propres préférences constitue une perte. L'optimum dans ce raisonnement représente la référence pour un investisseur, c'est

donc l'état où il faut se placer. Autrement il n'est pas cohérent avec son aversion au risque, il est donc perdant. C'est l'état d'équilibre naturel.

#### ✓ Propriété de surmartingale

Comme les processus de richesse ne sont pas des surmartingales, (mais des sous-martingales sous la probabilité risque neutre), pour une utilité concave standard  $V$ ,  $V(X_t)$  n'est pas une surmartingale. Toutefois, dans les problèmes d'optimisation dynamique classique, on retrouve cette propriété pour la fonction de valeurs du problème (définition (2.19)), comme nous l'avons vu dans les rappels précédents, en liaison avec les notions de programmation dynamique. L'optimum est lui associé à la propriété de martingale.

Cette propriété peut être interprétée comme le fait qu'à tout date  $t$ , l'utilité est l'utilité maximale conditionnelle espérée d'un investissement dans le marché de référence.

Nous remarquons, dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille à horizon  $T$ , et comme  $u$  est une simple fonction concave, que  $u(X_T^\pi)$  ne peut être en général une surmartingale pour toutes les stratégies admissibles. En effet par une simple application du lemme d'Itô, nous avons

$$du(X_t^\pi) = \left( (r_t X_t^\pi + \langle \eta_t, \pi_t \sigma_t \rangle) u'(X_t^\pi) + \frac{1}{2} u''(X_t^\pi) \|\pi_t \sigma_t\|^2 \right) dt + (*) dW_t$$

en particulier si le taux court est strictement positif et si la stratégie  $\pi \equiv 0$  est admissible. Alors le processus  $u(X_t^{\pi=0}) = u(xe^{\int_0^t r_s ds})$  ne peut être une surmartingale. Par contre, nous pouvons vérifier facilement pour tout  $t < T$ , que la fonction valeur  $v$  (définition (2.19)) vérifie cette propriété de consistance avec l'univers d'investissement. Nous avons vu aussi que s'il existe un portefeuille optimal, alors le processus  $v(t, X^{\pi^*})$ ,  $t \geq T$  est une martingale. Enfin, d'après les résultats des théorèmes 3.3 et 3.6, nous obtenons que  $U$  est strictement concave ce qui implique que cette fonction valeur est une utilité sur l'intervalle  $[0, T[$ .

Toutes ces remarques montrent que la propriété de surmartingale pour toutes les stratégies et martingale tout au long de la trajectoire optimale est naturelle, car comme nous venons de le voir c'est l'une des propriétés de base d'une fonction valeurs d'un problème d'optimisation de portefeuille

classique.

✓ **Existence d'un unique optimum**

- Existence : cette propriété est une condition nécessaire, car nous pouvons nous demander quel intérêt nous porterons à une utilité si elle ne nous permet pas d'identifier la stratégie optimale.
- Unicité : Il faut comprendre par unicité : l'unicité de la richesse optimale et non de la stratégie, car il est possible de réaliser un même gain en suivant deux stratégies différentes.

En raisonnant par l'absurde nous supposons qu'il existe deux stratégies optimale  $\pi^1$  et  $\pi^2$  qui génèrent deux richesses optimales  $X^{\pi^1}$  et  $X^{\pi^2}$  différentes. Par convexité de l'ensemble des contraintes, nous savons que la stratégie  $\bar{\pi} = (\pi^1 + \pi^2)/2$  est encore une stratégie admissible, ce qui implique par stricte convexité de  $u(t, \cdot, x)$ , ainsi que par l'optimalité de  $\pi^1$  et  $\pi^2$ , pour la même richesse initiale  $x$ , que

$$\mathbb{E}(u(t, X_t^{\bar{\pi}})) > \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(u(t, X_t^{\pi^1})) + \mathbb{E}(u(t, X_t^{\pi^2})) \right) = u(0, x) \quad (4.5)$$

ce qui est contradictoire.

- ✓ Le temps  $t$  joue un rôle important dans l'analyse des stratégies futures car l'évolution d'une utilité par rapport à ce paramètre n'est autre que l'évolution des préférences et de l'aversion au risque de l'agent au cours du temps et par conséquent, l'évolution de son processus de décision et d'investissement. De plus vu la stochasticité de ces utilités, le temps peut être aussi interprété comme facteur de risque.

Nous remarquons, enfin, que telles qu'elles sont définies, ces utilités sont indépendantes de tout horizon d'investissement, ce qui les rend *intertemporelles*.

## 4.3 Exemples simples d'utilités

La définition des utilités repose sur deux propriétés essentielles, d'une part qu'à toute date  $t$  l'utilité  $u(t, x)$  est une utilité classique, d'autre part sur la

compatibilité avec l'univers d'investissement. Les exemples que nous proposons ci-dessous sont basés sur des perturbations stochastiques simples de l'utilité initiale (classique) et vérifient automatiquement le fait d'être des utilités classiques. La question essentielle est donc d'étudier les conséquences de l'hypothèse de cohérence avec un univers d'investissement donné.

### 4.3.1 Exemple 1 : Changement de prix d'état dans une utilité classique

Dans cet exemple, par souci de simplicité, nous supposons que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  est un cône convexe fermé qui ne dépend pas de la richesse initiale  $x$ .

Nous nous donnons a priori l'utilité classique initiale  $U = v$ , que nous supposons déterministe, strictement concave et strictement croissante.

Vu l'importance des changements de probabilité dans l'activité de la banque d'investissement, il est naturel de se demander si un changement de probabilité composé avec un facteur "d'actualisation", que nous appellerons changement de prix d'état, suivant la terminologie de Bachelier [6] et de Samuelson [101] transforme une utilité classique en une utilité compatible avec l'univers d'investissement.

Le changement de prix d'état est décrit par l'intermédiaire d'une semimartingale strictement positive  $Z$ , qui évolue selon la dynamique

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t, \quad Z_0 = 1 \quad (4.6)$$

où les processus adaptés  $\mu$  et  $\gamma$  sont supposés bornés.

**Définition :** Soit  $u(t, x)$  le processus d'utilité dynamique défini par sa condition initiale  $U$ , et pour tout  $t > 0$ , pour tout  $x > 0$  par :

$$u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} Z_t U(x).$$

Par définition, quel que soit  $t \geq 0$ , l'application  $x \mapsto u(t, x)$  est une fonction d'utilité strictement concave croissante. Nous privilégions donc la concavité et nous nous intéressons à établir les conditions nécessaires ou suffisantes sous lesquelles l'utilité dynamique  $u$  est compatible avec l'univers d'investissement,

c'est-à-dire  $u(t, X_t^\pi) = Z_t U(X_t^\pi)$  est une surmartingale quelque soit la stratégie admissible  $\pi \in \mathcal{K}$ .

### Le cas du changement de probabilité

Pour commencer, nous supposons que le processus  $Z$  ci-dessus est une martingale exponentielle. Comme  $\gamma$  est supposé borné, il est bien connu que  $Z$  est une vraie martingale, qui peut être vue comme une densité de probabilité. Choisissons un horizon final de gestion  $T_H$  (en général très lointain) et définissons une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}^Z$  sur la tribu  $\mathcal{F}_{T_H}$ , par

$$\frac{d\mathbb{Q}^Z}{d\mathbb{P}} := Z_{T_H}.$$

Alors, restreinte à la tribu  $\mathcal{F}_t$ , la densité est la variable aléatoire  $Z_t$ .

Le théorème de Girsanov permet de reformuler de manière très simple l'hypothèse de compatibilité avec l'univers d'investissement, puisque nous avons la caractérisation suivante des surmartingales sous la nouvelle probabilité :

**Théorème de Girsanov** Un processus adapté et continu  $J$  est une  $\mathbb{Q}^Z$ -surmartingale locale si et seulement si  $(Z_t J_t)$  est une  $\mathbb{P}$ -surmartingale locale.

**Critère de compatibilité** L'utilité dynamique  $u$  est compatible avec l'univers d'investissement  $((u(t, X_t^\pi))_{t \geq 0})$  est une surmartingale sous la probabilité  $\mathbb{P}$  si et seulement si les processus  $U(X_t^\pi)$  sont des  $\mathbb{Q}^Z$ -surmartingales locales, et s'il existe une stratégie pour laquelle cette quantité est une vraie martingale.

Le problème est donc équivalent à montrer que l'utilité standard  $U(x)$  est une utilité pour le même univers d'investissement, mais sous une nouvelle probabilité a priori, c'est à dire  $\mathbb{Q}^Z$  au lieu de  $\mathbb{P}$ .

Puisque cette utilité ne dépend pas du temps, la stratégie constante (càd  $\pi \equiv 0$ ), si elle est *admissible* est optimale. A priori, une condition suffisante pour que la condition de surmartingale soit satisfaite est que les portefeuilles admissibles soient des martingales sous  $\mathbb{Q}^Z$  ; en d'autres termes le  $\mathbb{Q}^Z$ -nouveau marché doit être sans taux d'intérêt, et la prime de risque doit être nulle ou dans le noyau de  $\sigma^\perp$ . Si de plus les stratégies constantes sont admissibles, alors  $U$  est une  $\mathbb{Q}^Z$ -utilité .

**Seconde étape :** Dans la suite, nous ne supposons plus que le processus  $Z$  est une martingale. Notre objectif est de déterminer si les hypothèses faites dans le premier cas sont encore nécessaires dans le cas présent. Pour cela, nous avons besoin d'explicitier les différentes dynamiques. Pour simplifier l'écriture de la formule d'Itô, nous supposons la fonction concave  $U$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Sous cette hypothèse, d'après la formule d'Itô, la condition de surmartingale pour toute stratégie admissible s'écrit, pour presque tout  $(t, \omega)$ ,

$$u(t, X_t^\pi) \mu_t + u'(t, X_t^\pi) \left( r_t X_t^\pi + \langle \pi_t \sigma_t, \eta_t + \gamma_t \rangle \right) + \frac{1}{2} u''(t, X_t^\pi) \|\pi_t \sigma_t\|^2 \leq 0.$$

Nous faisons en plus l'hypothèse que nous pouvons partir, à chaque date  $t$  d'une richesse initiale  $x$ .

Il s'ensuit, en prenant le supremum sur toute les stratégies admissibles, que

$$u \mu_t + u' r_t x + \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \left\{ u' \langle \pi_t \sigma_t, \eta_t + \gamma_t \rangle + \frac{u''}{2} \|\pi_t \sigma_t\|^2 \right\} (t, x) \leq 0. \quad (4.7)$$

Donc, en notons par  $\mathcal{K}_t$  l'ensemble des stratégies admissibles à l'instant  $t$  et par  $\prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t}$  l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace  $\mathcal{K}_t \sigma_t$  à la date  $t$ , alors la stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t^*(x) \sigma_t = - \frac{u'}{u''}(t, x) \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t).$$

Par conséquent, si  $u$  est une utilité progressive alors  $u(t, X_t^{\pi^*})$  est une martingale, ce qui se traduit par l'identité suivante :

$$\left\{ u \mu_t + u' r_t x - \frac{(u')^2}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2 \right\} (t, x) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

En exprimant  $u$  ainsi que ses dérivées en fonction de  $U$  et ses dérivées, cette identité peut se réécrire, en divisant par  $Z_t x U'(x)$  sous la forme suivante

$$\frac{U}{x U'}(x) \mu_t + r_t - \frac{U'}{2x U''}(x) \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2 = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x > 0. \quad (4.9)$$

À ce stade, le processus  $u$  est une utilité *progressive* si et seulement si cette équation est satisfaite. Comme les quantités  $\mu$ ,  $r$ ,  $\eta$  et  $\gamma$  ne dépendent pas de  $x$ , nous remarquons que le choix des paramètres de diffusion de  $Z$  ne peuvent être

quelconques (car sinon, si  $\mu$  ou  $\gamma$  dépend de  $x$ , nous pouvons perdre la concavité de  $u$ ). C'est pour cette raison que nous distinguons les deux cas suivants :

**Premier cas :** Pour commencer, nous nous intéressons au cas où  $U/xU'$  et  $U'/xU''$  sont proportionnels. Il existe alors une constante  $c < 0$  telle que

$$\frac{U''}{U'} = c \frac{U'}{U}$$

ce qui revient, en intégrant par rapport à  $x$ , à écrire qu'il existe une deuxième constante  $c_1$  telle que  $c_1 + \log(u') = \log(u^c)$  ou encore à  $u'u^{-c} = c_2$ .

- **$U$  est une utilité puissance :** Si  $c \neq 1$ , par une simple intégration de cette dernière identité, on obtient que  $U$  ne peut être qu'une utilité puissance, c-à-d. il existe un réel  $0 < \alpha < 1$  tel que  $U(x) = x^\alpha/\alpha$ . Par conséquent, l'équation (4.9) devient

$$\frac{1}{\alpha}\mu_t + r_t + \frac{1}{2(1-\alpha)}\left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t + \gamma_t)\right\|^2 = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.10)$$

ce qui implique que le choix du processus  $Z$  est fortement lié à l'univers d'investissement. Par contre, nous ne pouvons conclure ni que  $Z$  est une martingale, ni que  $X^\pi Z$  l'est comme il est le cas ci-dessus. En revanche, ce qui est important à noter est que dans ce cas, les paramètres de diffusion de  $Z$  dépendent, outre l'univers d'investissement, de l'aversion au risque associée à  $U$  notée dans l'équation (4.14) ci-dessus par  $1 - \alpha$ .

**Remarque 4.1.** *Dans la définition des utilités progressives : Zariphopoulou et al. [84], [89], [85], [92], [87]... Tehranchi et al [36] et G. Zitkovic [115], les auteurs ont supposé que l'on peut toujours se placer dans le cadre d'un marché où le taux court  $r$  est nul. Or dans cet exemple d'utilité puissance, le taux court joue un rôle important, nous permet d'élargir une famille d'utilités progressives certes, particulière (puissance), mais nous n'aurions pas remarqué si nous avons adopté la même définition que ces auteurs.*

- **$U$  est une utilité exponentielle :** Si  $c = 1$ , alors  $U(x) = 1 - \exp(-c_2x)$  est une utilité exponentielle de paramètre  $c_2$ . Par conséquent, l'équation



(4.9) devient

$$xr_t = \frac{1}{c_2} \left( -\mu_t + \frac{1}{2} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2 \right), \quad \forall t \geq 0, \quad x > 0. \quad (4.11)$$

Comme le terme de droite est indépendant de  $x$ , cela implique qu'une condition nécessaire et suffisante sous laquelle  $u$  est une utilité progressive est que

$$r = 0 \quad \text{et} \quad \mu_t = \frac{1}{2} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2. \quad (4.12)$$

**Second cas :** Dans le cas contraire, si  $U/x U'$  et  $U'/x U''$  ne sont pas proportionnels, alors par le même raisonnement que dans le premier cas, on obtient que  $u$  est une utilité progressive si et seulement si  $r = 0$  et  $\mu = 0$ . Ce qui est, encore, équivalent à

$$r = 0, \quad \eta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^*, \quad (4.13)$$

où  $(\mathcal{K}\sigma)^*$  est le cône dual de  $\mathcal{K}\sigma$  (voir définition B.14), dont l'une des propriétés est la suivante :

$$\nu \in (\mathcal{K}\sigma)^* \Leftrightarrow \langle \pi\sigma, \nu \rangle \leq 0, \quad \forall \pi \in \mathcal{K}.$$

Par conséquent, par une simple application du lemme d'Itô, et pour  $\pi \in \mathcal{K}$ , le processus  $ZX^\pi$  est une surmartingale. Nous en déduisons alors ce premier résultat.

**Théorème 4.1.** *Soit  $U$  une fonction d'utilité, et  $Z$  un processus positif tel que  $dZ_t = Z_t(\mu_t + \gamma_t dW_t)$ . Nous définissons l'utilité stochastique  $u(t, x) = Z_t U(x)$ .*

- *Si  $U$  n'est ni de type puissance ni exponentielle, alors  $u(t, x)$  est une utilité progressive si et seulement si  $Z$  est une martingale, de volatilité  $\gamma$  telle que  $\gamma + \eta$  appartienne à l'orthogonal de  $\mathcal{K}\sigma$ , et si le marché initial est sans taux d'intérêt. Alors la stratégie  $\pi \equiv 0$ , qui correspond à une richesse constante est optimale.*
- *Si  $U$  est une fonction d'utilité puissance ( $0 < \alpha < 1$ ), les paramètres de  $Z$  doivent satisfaire*

$$\frac{1}{\alpha} \mu_t + r_t + \frac{1}{2(1-\alpha)} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2 = 0, \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ a.s.}, \quad (4.14)$$

la stratégie optimale est

$$\pi_t^*(X_t^{x,*})\sigma_t = \frac{X_t^{x,*}}{1-\alpha} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\eta_t + \gamma_t).$$

- Si  $U$  est une fonction exponentielle ( $U(x) = 1 - e^{-\alpha x}/\alpha$ ), le marché doit être sans taux d'intérêt, et le drift de  $Z$  dépend de sa volatilité.

$$r_t = 0 \quad \text{et} \quad \mu_t = \frac{1}{2} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\eta_t + \gamma_t) \right\|^2, \quad dt \otimes d\mathbb{P} \text{ a.s.}, \quad (4.15)$$

la stratégie optimale est

$$\pi_t^*(X_t^{x,*})\sigma_t = \frac{1}{\alpha} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\eta_t + \gamma_t).$$

Ce résultat n'est autre qu'une condition nécessaire et suffisante. Par contre, comme le marché est incomplet, nous remarquons d'après la dernière équation de (4.13) que le choix de la volatilité  $\gamma$  ainsi que la prime de marché ne sont pas uniques. Par contre, nous pouvons noter que, quelque soit le choix de  $Z$ , toutes les utilités considérées génèrent la même stratégie optimale  $\pi^* \equiv 0$  et elles sont issues de la même condition initiale  $U$ , ce qui montre que la condition initiale est insuffisante pour avoir l'unicité de ces processus.

**Remarque 4.2.** Si le marché est complet, alors  $\pi^* = 0$  et par suite toutes les utilités construites ci-dessus sont identiques. Cependant, l'unicité reste encore une question ouverte.

### 4.3.2 Exemple 2 : Utilité classique, changement de probabilité et changement de numéraire

Dans cet exemple, en plus des hypothèses faites dans l'exemple précédent, nous considérons un second processus  $Y$  qui évolue selon la dynamique

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \alpha_t dt + \delta_t dW_t. \quad (4.16)$$

Comme dans l'exemple 4.3.1, le but est d'étudier sous quelles conditions le nouveau processus  $u$  défini par

$$u(t, x) = Z_t U\left(\frac{x}{Y_t}\right) \quad (4.17)$$

est une utilité progressive, et surtout dans quel univers.

Pour cela, l'idée est de se rapprocher le plus possible du cas de l'exemple précédent, en définissant un nouveau univers. En effet, pour  $\pi \in \mathcal{K}$ , la dynamique du processus  $X^\pi/Y$  est donnée, en appliquant le lemme d'Itô, par

$$d\frac{X_t^\pi}{Y_t} = (r_t - \alpha_t + \langle \delta_t, \eta_t \rangle) \frac{X_t^\pi}{Y_t} dt + \left( \frac{\pi_t}{Y_t} \sigma_t - \frac{X_t^\pi}{Y_t} \delta_t \right) (dW_t + (\eta_t - \delta_t) dt).$$

Nous pouvons alors définir un nouvel univers d'investissement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} = r - \alpha + \langle \delta, \eta \rangle : \text{le nouveau taux court,} \\ \tilde{\eta} = \eta - \delta : \text{la nouvelle prime de marché,} \\ \tilde{\pi} = \frac{\pi}{Y} - \frac{X^\pi}{Y} \delta \sigma^{-1} : \text{les nouvelles stratégies,} \\ \tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \frac{X^\pi}{Y} : \text{les nouvelles richesses,} \\ \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{x}) = \frac{\mathcal{K}(\tilde{x}Y)}{Y} - \tilde{x} \delta \sigma^{-1} : \text{le nouvel espace de contraintes,} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

ce qui implique que, pour tout  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}$ , on a

$$d\tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \tilde{r}_t \tilde{X}^{\tilde{\pi}} dt + \tilde{\pi}_t \sigma_t (dW_t + \tilde{\eta}_t dt). \quad (4.19)$$

Considérons, par la suite,  $\tilde{u}$  le processus défini par

$$\tilde{u}(t, \tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Z_t U(\tilde{x}).$$

L'équivalence suivante :  $u$  est une utilité dans l'univers d'investissement  $(r, \eta, \mathcal{K})$  si et seulement si  $\tilde{u}$  est une utilité dans le nouveau univers  $(\tilde{r}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathcal{K}})$  suggère que l'approche la plus naturelle est d'appliquer les résultats de l'exemple précédent à  $\tilde{u}$  et en déduire, d'après cette dernière équivalence, les conditions nécessaires ou suffisantes pour que  $u$  soit une utilité progressive dans l'univers de départ. Malheureusement, ceci n'est pas possible car, contrairement à l'hypothèse faite au début de l'exemple précédent, le nouveau espace de contraintes  $\tilde{\mathcal{K}}$  dépend de la richesse  $\tilde{x}$ , comme nous pouvons bien le voir dans (4.18). Cependant, par analogie entre les dynamiques des richesses dans les deux univers, nous pouvons appliquer le même raisonnement et ainsi obtenir la condition de compatibilité donnée par

$$u\mu_t + u'\tilde{r}_t x + \text{essup}_{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}(x)} \left\{ u' < \tilde{\pi}_t \sigma_t, \tilde{\eta}_t + \gamma_t > + \frac{u''}{2} \|\tilde{\pi}_t \sigma_t\|^2 \right\} (t, x) = 0, \quad (4.20)$$

dont la stratégie optimale sera donnée par le théorème 6.5, et qui s'énonce :

**Théorème 4.2.** *La stratégie optimale au problème d'optimisation (4.20) est donnée par*

$$\tilde{\pi}_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \left( \prod_{\mathcal{K}_\sigma} (-xu''\delta_t + u'(\tilde{\eta}_t + \gamma_t)) + xu''\delta_t \right) (t, x). \quad (4.21)$$

**Remarque 4.3.** *La preuve de ce résultat sera donnée dans le chapitre 6 paragraphe 6.3.2, quand nous étudierons la question du changement de numéraire en détails.*

Pour simplifier, nous supposons de plus que  $\mathcal{K}$  est un sous espace vectoriel. Par conséquent, l'opérateur  $\prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t}$  n'est autre que l'opérateur de projection orthogonale. En injectant (4.21) dans (4.20), nous trouvons que

$$u(t, \tilde{x})\mu_t + u'(t, \tilde{x})\tilde{r}_t \tilde{x} - \frac{(u')^2}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\tilde{\eta} + \gamma_t) \right\|^2 - \frac{\tilde{x}^2 u''}{2} \left\| \delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\delta_t) \right\|^2 (t, \tilde{x}) = 0. \quad (4.22)$$

En réécrivant cette équation en terme de la fonction  $U$ , en simplifiant par  $Z\tilde{x}U$  et en faisant le changement de variable  $x = \tilde{x}Y_t$ , nous obtenons que  $\forall t \geq 0, x > 0$

$$\frac{U}{xU'}(x)\mu_t + \tilde{r}_t - \frac{U'}{2xU''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\tilde{\eta} + \gamma_t) \right\|^2 - \frac{xU''}{2U'} \left\| \delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\delta_t) \right\|^2 (t, x) = 0. \quad (4.23)$$

Nous retrouvons alors l'équation (4.9) avec un terme supplémentaire, qui est un terme purement dû au processus  $Y$ . Ceci explique encore une fois que le cadre de cet exemple ne peut être déduit directement de celui de l'exemple 4.3.1. Par contre, le raisonnement est identique. Ainsi, rappelons que les paramètres  $\tilde{r}, \tilde{\eta}, \mu$  et  $\gamma$  sont indépendants de  $x$ , et par conséquent nous commençons par traiter les cas particuliers :

**Premier cas :** Si  $U/xU'$  et  $U'/xU''$  sont proportionnels. Nous avons démontré ci-dessus que cela implique que  $U$  est soit de type puissance soit exponentielle.

- \*  **$U$  est une utilité puissance.** Alors  $\exists a > 0$  tel que  $U(x) = x^a/a$ . Par conséquent, l'équation (4.23) devient,  $\forall t \geq 0$

$$\frac{1}{a}\mu_t + \tilde{r}_t - \frac{1}{2(1-a)}\left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t - \delta_t + \gamma_t)\right\|^2 - \frac{1-a}{2}\left\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\right\|^2 = 0 \quad (4.24)$$

- \*  **$U$  est une utilité exponentielle.** Donc  $U(x) = -\frac{1}{c}e^{-cx}$ ,  $c > 0$ . Cela induit que,  $\forall t \geq 0$ ,  $x > 0$ , on a

$$x\tilde{r}_t + \frac{cx^2}{2}\left\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\right\|^2 - \frac{1}{c}\left(-\mu_t + \frac{1}{2}\left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t - \delta_t + \gamma_t)\right\|^2\right) = 0.$$

Étant un polynôme de second degré identiquement nul, par conséquent, l'équation ci-dessus est équivalente à ce que tous ses coefficients soient nuls, c-à-d

$$\tilde{r} = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}\left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta - \delta + \gamma)\right\|^2, \quad \delta \in \mathcal{K}\sigma$$

ce qui est encore équivalent à,

$$\alpha = r + \langle \delta, \eta \rangle, \quad \mu = \frac{1}{2}\left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta - \delta + \gamma)\right\|^2, \quad \delta\sigma^{-1} \text{ est admissible.} \quad (4.25)$$

**Deuxième cas :** Si  $U$  n'est ni de type puissance ni exponentielle, les termes de l'identité (4.23) sont tous nuls, ce qui est équivalent à

$$\tilde{r} = 0, \quad \mu = 0, \quad \delta \in \mathcal{K}\sigma, \quad \eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^\perp$$

en d'autres termes :

$Z$  est une martingale,  $X^\pi/Y$  est une martingale locale positive sous la probabilité  $Q^Z$  donnée par :  $dQ^Z/d\mathbb{P} = Z$ ,  $\delta\sigma^{-1}$  est une stratégie admissible

D'où le résultat suivant :

**Théorème 4.3.** *Soit  $U$  une fonction d'utilité.*

- Si  $U$  n'est ni de type puissance ni exponentielle, alors le processus  $u$  défini par  $u(t, x) = Z_t U(x/Y_t)$  est une utilité si et seulement si  $Z$  est une martingale,  $ZX^\pi/Y, \pi \in \mathcal{K}$  est martingale et la stratégie  $\delta\sigma^{-1}$  est admissible. Dans ce cas la stratégie optimale est  $\delta\sigma^{-1}$  quelque soit le choix de  $U$ .

- Si  $U$  est une fonction d'utilité puissance ou exponentielle, alors la condition : “ $Z$  est une martingale,  $ZX$  est une surmartingale pour toute stratégie  $\pi$  admissible” n'est pas une condition nécessaire.

Dans le cas où  $U$  est une utilité puissance de paramètre  $\alpha$ , il suffit de choisir  $Z$  tel que les conditions (4.24) soient satisfaites. Sinon, dans le cas où  $U$  est exponentielle, il suffit que  $Z$  vérifie (4.25).

Enfin, remarquons que dans ces exemples, le processus  $Z$  peut être interprété comme un changement de probabilité et  $Y$  comme un changement de numéraire. Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si nous supposons que  $Z = 1$ , alors  $u$  défini par  $u(t, x) = U(x/Y_t)$  est une utilité dans l'univers d'investissement  $(r, \eta, \mathcal{K})$  si et seulement si  $X^\pi/Y, \pi \in \mathcal{K}$  est une martingale locale et que la stratégie  $\delta\sigma^{-1}$  est admissible.*

Nous remarquons aussi, d'après ce qui précède, que le fait de se placer dans un nouveau numéraire  $Y$ , nous permet de changer la prime de marché. En particulier, un bon choix de numéraire permettra de se placer dans un nouveau univers où la prime de risque est nulle. Nous aborderons cette question avec plus de détails dans le chapitre suivant.

### 4.3.3 Dynamique de l'utilité progressive $u$

Nous nous intéressons à la dynamique de l'utilité  $u$  dans le cas où la fonction d'utilité  $U$  n'est ni une utilité puissance ni exponentielle. Pour cela, nous utilisons la définition du processus  $Z_t U(\frac{x}{Y_t})$  ainsi que le lemme d'Itô, en rappelant que dans ce cadre  $Z$  est une martingale ( $\mu \equiv 0$ ). Il s'ensuit d'après les dynamiques (4.6) et (4.16) de  $Z$  et  $Y$  que

$$\begin{aligned} du(t, x) &= d\left(Z_t U\left(\frac{x}{Y_t}\right)\right) = Z_t \frac{x}{Y_t} \left( U \gamma_t - U' \delta_t \right) \left( \frac{x}{Y_t} \right) dW_t \\ &+ \left( Z_t \frac{x}{Y_t} U' (-\alpha_t + \|\delta_t\|^2 - \langle \gamma_t, \delta_t \rangle) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{Y_t} \right)^2 U'' \|\delta_t\|^2 \right) \left( \frac{x}{Y_t} \right) dt \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ainsi, et d'après ce qui précède,  $u$  est une utilité *progressive* si et seulement si

$$\begin{cases} r = \alpha - \langle \delta, \eta_t \rangle \\ \eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^\perp, \delta \in \mathcal{K}\sigma \end{cases}$$

ce qui implique que

$$-\alpha_t + \|\delta_t\|^2 - \langle \gamma_t, \delta_t \rangle = -r_t.$$

Par suite le terme en  $dt$  dans la dynamique de  $u$ , ou encore le drift, est égal à

$$-r_t + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{Y_t} \right)^2 U'' \left( \frac{x}{Y_t} \right) \|\delta_t\|^2. \quad (4.27)$$

Soit  $\Gamma$  le coefficient de  $dW_t$  dans la dynamique de  $u$ . Alors

$$\Gamma(t, x) = \left( Z_t \frac{x}{Y_t} U \gamma_t - Z_t \frac{x}{Y_t} U' \delta_t \right) \left( \frac{x}{Y_t} \right). \quad (4.28)$$

En dérivant par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$\Gamma'(t, x) = \left( \frac{Z_t}{Y_t} U'(\gamma_t - \delta_t) - Z_t \frac{x}{Y_t} U'' \delta_t \right) \left( \frac{x}{Y_t} \right) \quad (4.29)$$

ou encore

$$\Gamma'(t, x) + u'(t, x) \eta_t = \left( \frac{Z_t}{Y_t} U'(\eta_t + \gamma_t - \delta_t) - Z_t \frac{x}{Y_t} U'' \delta_t \right) \left( \frac{x}{Y_t} \right). \quad (4.30)$$

Comme  $\eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^\perp$  et que  $\delta \in \mathcal{K}\sigma$ , ceci implique que

$$\prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\Gamma' + u' \eta_t)(t, x) = -Z_t \frac{x}{Y_t} U'' \left( \frac{x}{Y_t} \right) \delta_t. \quad (4.31)$$

Nous en déduisons par conséquent, en injectant cette identité dans (4.27) puis dans la dynamique (4.26), que

$$\begin{aligned} du(t, x) &= \left( \frac{1}{2u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\Gamma' + u' \eta_t) \right)^2 - r_t u'(t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t \quad (4.32) \\ \Gamma(t, x) &= \left( u \gamma_t - x u' \delta_t \right)(t, x). \end{aligned}$$

Cette représentation de la dynamique de  $u$  est importante dans le sens où elle met en évidence le rôle que joue la volatilité de cette utilité ainsi que sa dérivée pour décrire l'évolution de cette classe d'utilité. De plus, en adoptant ces notations, il est facile de voir que la stratégie optimale à son tour peut s'exprimer en fonction de cette volatilité comme suit :

$$\pi^*(t, x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\Gamma' + u' \eta_t)(t, x). \quad (4.33)$$

Nous reviendrons tout au long de notre étude sur cette équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS), car nous montrerons dans la suite que toute utilité progressive est forcément solution de ce type d'EDPS. De même pour la richesse optimale.

**Remarque 4.4.** *D'une manière similaire, nous pouvons établir cette dynamique dans le cadre des utilités puissances ou exponentielles, mais ce n'est pas notre but ici.*

Notons qu'il existe plusieurs autres exemples d'utilités progressives qui ont été fournis dans les travaux de M. Musiela et T. Zariphopoulou, nous citons par exemple [87], [92] et [86]. Dans [86], les auteurs font remarquer que les utilités progressives qu'ils construisent obéissent à une dynamique très proche de celle de (4.32), établie ci-dessus (sans projection sur le cône  $\mathcal{K}\sigma$ ) mais cette EDPS n'a jamais été étudiée, ce que nous ferons dans toute la suite. Par contre, les auteurs se sont intéressés très particulièrement au cadre des utilités progressives strictement décroissantes dans le temps ( $\Gamma \equiv 0$ ) et ce dans [86] dans un premier temps puis de manière approfondie dans [87] et [88]. Nous reviendrons à ces utilités décroissantes et aux résultats établis par M. Musiela et T. Zariphopoulou ainsi que par Tehranchi et al. [36], dans le paragraphe 7.7 du chapitre 7.





# Chapitre 5

## Utilité progressive et équations aux dérivées partielles stochastiques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>153</b>
<b>5.2</b>	<b>Univers d'investissement . . . . .</b>	<b>153</b>
<b>5.3</b>	<b>Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques . . . . .</b>	<b>155</b>
5.3.1	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	156
5.3.2	Portefeuille optimal et EDP stochastiques . . . . .	158
<b>5.4</b>	<b>Utilités progressives d'Itô avec paramètres spa- tiaux . . . . .</b>	<b>162</b>
5.4.1	Lemme d'Itô-Ventzel . . . . .	163
5.4.2	Lemme d'Itô-Ventzel et consistance avec l'uni- vers d'investissement . . . . .	164
5.4.3	Principe de la programmation dynamique . . . . .	166
5.4.4	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	168
5.4.5	Stratégie optimale . . . . .	169

---

*Résumé : Dans ce chapitre, nous traitons dans un premier temps le cadre particulier des utilités progressives markoviennes. Ces utilités sont alors solution d'équations de type Hamilton-Jacobi-Bellman identiques à celles étudiées dans le deuxième chapitre (voir le paragraphe 2.6, Théorème 2.2), à la seule différence que, dans le cadre des utilités progressives et contrairement au cadre du chapitre 2, ces équations de **HJB** sont des équations avec condition initiale et non pas une condition finale. C'est pour cette raison et vu qu'il n'existe aucun théorème de comparaison établi dans ce cadre précis, que les techniques classiques d'EDP ne nous permettent pas de conclure ni à l'existence ni à l'unicité des solutions, voire même à leur concavité.*

*Ensuite, nous montrons que ces utilités progressives markoviennes sont encore solution de l'EDP stochastique (4.32) établie dans le chapitre précédent et dont le drift est contraint à la fois par le marché et par la dérivée de la volatilité de ces utilités. Ceci constitue notre principale motivation pour mieux comprendre la dynamique de ces utilités et le rôle joué par la volatilité associée. Pour ce, nous allons nous intéresser à un cadre plus général qui consiste à supposer que les utilités progressives sont des champs aléatoires ou encore des semimartingales avec un paramètre spatial obéissant à une dynamique de la forme*

$$du(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t. \quad (5.1)$$

*Pour étudier ces processus d'Itô composés avec des richesses, c-à-d.  $u(t, X_t^{x,\pi})$ , nous avons besoin d'un outil puissant et adéquat à la fois. En particulier, il s'agit d'une formule d'Itô généralisée appelée aussi formule d'Itô-Ventzel, lemme 5.1 (voir aussi Kunita [74], paragraphe 3.3 pour une preuve détaillée de ce résultat). Cette formule, à elle seule, étant insuffisante, nous faisons une hypothèse de recollement de stratégie appelée aussi hypothèse de bifurcation (voir le paragraphe 5.4.3 hypothèse 5.3 et le premier chapitre du cours de Saint Flour [20] par Nicole El Karoui pour la théorie générale). Nous montrons alors, comme dans les cadres des exemples du chapitre précédent et des utilités progressives markoviennes, que le drift  $\beta$  dans la dynamique (5.1) ne peut être quelconque : il est fortement contraint par l'univers d'investissement et la dérivée  $\Gamma$  de la volatilité.*

*Enfin nous donnons une interprétation financière de ce paramètre  $\Gamma$  qui s'avère jouer un rôle fondamental dans toute notre étude, au niveau de l'utilité comme*

au niveau des processus de richesses optimales. Par contre, montrer l'existence d'un lien entre la concavité de ces utilités et leurs EDP stochastiques reste une question ouverte et un vrai challenge.

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous portons un grand intérêt aux équations aux dérivées partielles stochastiques du type (4.32) établies dans le chapitre précédent où nous avons rappelé que les dynamiques des utilités progressives n'ont jamais été développées ou approfondies dans les travaux existants, outre le cadre très particulier des utilités progressives décroissantes dans le temps ([86],[87],[88],[36]) ce qui revient à des équations aux dérivées partielles ordinaires. Le but de ce chapitre est d'étudier, dans un premier temps, le cadre des utilités progressives markoviennes puis de manière très générale des utilités progressives comme des semimartingales de paramètre spatial  $x$  qui obéissent à une dynamique de la forme

$$\begin{cases} du(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t \\ u(0, x) = u(x). \end{cases}$$

Nous montrons, à l'aide de quelques outils mathématiques indispensables comme la formule d'Itô généralisée (lemme 5.1) que le paramètre de diffusion  $\beta$  dans cette dernière équation ne peut être quelconque, il est complètement déterminé par le marché et la dérivée  $\Gamma'$  de la volatilité  $\Gamma$  par rapport à  $x$ , un paramètre qui s'avère fondamental dans ces questions d'utilités progressives.

## 5.2 Univers d'investissement

Dans la suite, nous avons besoin de donner plus de précisions sur l'univers d'investissement. C'est pour cette raison que dans tout ce qui suit, nous considérons un marché financier constitué de  $d$  actifs risqués et d'un actif sans risque. Les actifs risqués notés par  $\xi^i$ ,  $i = 1..d$  obéissent aux dynamiques suivantes

$$\frac{d\xi_t^i}{\xi_t^i} = b_t^i dt + (\sigma_t^i)^* dW_t, \text{ pour } 1 \leq i \leq d, \quad (5.2)$$

tandis que l'actif sans risque est donné par

$$\frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} = r_t dt. \quad (5.3)$$

Nous savons, par ailleurs, que la richesse d'un investisseur qui détient la quantité  $\pi^i/\xi^i$  de chaque actif  $\xi$  obéit à la dynamique suivante

$$\begin{cases} dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt), \\ X_s^{s,x,\pi} = x \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\eta$  désigne la prime de risque appelée aussi prime de marché,  $r$  le taux court et  $\sigma$  la matrice carrée  $(\sigma^i)_{i=1..d}$  supposée dans toute la suite inversible.

**Définition 5.1.** Notons par  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  un tel marché financier.

Nous supposons aussi que l'ensemble  $\mathcal{K}$ , dans lequel l'investisseur est contraint de choisir ses stratégies  $\pi$ , est un cône convexe fermé.

Partant du fait qu'il est tout à fait naturel qu'un investisseur peut décider, à tout instant  $t \geq 0$ , de redéfinir son espace de contraintes selon ses obligations, sa richesse ou encore sa manière d'interpréter et d'analyser l'état et l'évolution du marché financier dans lequel il investit, nous supposons dans toute la suite que l'ensemble dans lequel il est obligé de restreindre ses portefeuilles, noté ci-dessus par  $\mathcal{K}$ , n'est pas fixé pour toute la période de gestion mais au contraire peut évoluer dans le temps de manière stochastique. Nous le noterons alors dorénavant par  $\mathcal{K}_t$ , pour  $t \geq 0$ .

**Définition 5.2.** Notons par  $\mathcal{M}^{r,\eta}(\mathcal{K})$  le marché financier  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  dans le quel l'investisseur est contraint par l'ensemble  $\mathcal{K}$ .

Nous désignons dans la suite par  $\nabla_\xi$  et  $\Delta_\xi$  respectivement les opérateurs gradient et laplacien en  $\xi$ , c-à-d. pour toute fonction  $w$  du vecteur  $\xi$ , fonction deux fois dérivable, on a

$$\nabla_\xi w = (\partial_{\xi^i} w)_{1 \leq i \leq d}, \quad \Delta_\xi w = (\partial_{\xi^i} \partial_{\xi^i} w)_{1 \leq i, j \leq d} \text{ la matrice hessienne.} \quad (5.5)$$

Enfin, nous notons par  $\mathcal{L}^\xi$  l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{L}_t^\xi w = b(t, \xi) \cdot \nabla_\xi w + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, \xi) \sigma'(t, \xi) \Delta_\xi w). \quad (5.6)$$

### 5.3. Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

où  $tr$  désigne l'opérateur trace sur les matrices carrées. Nous obtenons en particulier, en appliquant le lemme d'Itô à  $w(t, \xi_t)$ , que

$$dw(t, \xi_t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} w + \mathcal{L}_t^\xi w \right)(t, \xi_t) dt + \langle \nabla_\xi w, \sigma_t \rangle(t, \xi_t) dW_t. \quad (5.7)$$

## 5.3 Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas markovien où nous supposons que tous les paramètres du modèle 5.2 sont simplement des fonctions du temps  $t$  et du cours des actifs  $\xi$ . Nous rappelons par ailleurs, d'après le chapitre 2, que de manière générale, il est très difficile d'avoir des propriétés de régularités des fonctions valeur. Ainsi, notre but n'est ni d'identifier les solutions ni de résoudre le problème d'optimisation de portefeuille, mais essentiellement de guider l'intuition en donnant un exemple assez clair par lequel nous mettons en valeur l'impact de l'univers d'investissement sur ces utilités ainsi que certains enjeux et difficultés que nous rencontrons tout au long de cette étude. Nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.1.** *Le processus d'utilité progressive introduit dans la définition 4.3, est une fonction du temps  $t$ , de la richesse  $x$  et du cours des actifs  $\xi$ . Nous supposons de plus que  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ .*

Remarquons que cette hypothèse implique en particulier que la source d'incertitude de  $u$  est uniquement due à sa dépendance en  $\xi$ .

Dans le deuxième chapitre, nous avons montré que si la fonction valeur  $v$  d'un problème d'optimisation de portefeuille au sens classique est assez régulière, alors elle est solution du système d'équation (2.2), c-à-d.

$$\begin{cases} v_t(t, x, \xi_t) + r_t x v'(t, x, \xi_t) + \mathcal{L}^\xi v(t, x, \xi_t) + \mathbf{H}(t, x, \xi, v', v'', \Delta_{\xi, x}^\sigma v) = 0, \\ \Delta_{\xi, x}^\sigma v = \partial_x \langle \nabla_\xi v, \sigma \rangle, \\ \mathbf{H}(t, x, \xi, p, p', w) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left( \frac{1}{2} \|\pi_t \sigma_t\|^2 p' + \langle \pi_t \sigma_t, p \eta_t + w \rangle \right), \\ v(T, x, \xi_0) = U(x). \end{cases} \quad (5.8)$$

Rappelons ensuite que les fonctions valeur et les utilités progressives sont définies de manière identique à partir d'un problème d'optimisation de portefeuille, sauf que, pour les unes c'est la condition finale qui est donnée alors que pour les autres c'est la condition initiale qui est connue.

En se basant sur le fait que le principe de programmation dynamique est complètement adapté à cette notion d'inter-temporalité dans la définition des utilités progressives, nous pouvons alors nous demander si en remplaçant la condition terminale  $U$  par une condition initiale  $u(0, \cdot)$  dans ce dernier système, nous pouvons vérifier que  $v$  est alors une utilité progressive.

La réponse à cette question est donnée dans le paragraphe suivant.

### 5.3.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

**Théorème 5.1.** *Soit  $u(t, \cdot, \xi_t)$  une fonction d'utilité markovienne (strictement concave croissante) de classe  $\mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ . Si  $u$  est solution du système d'équations suivant*

$$\begin{cases} u_t(t, x, \xi_t) + r_t x u'(t, x, \xi_t) + \mathcal{L}^\xi u(t, x, \xi_t) + \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) = 0, \\ \Delta_{\xi, x}^\sigma u = \partial_x \langle \nabla_\xi u, \sigma \rangle, \\ \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) = \left( \frac{u''}{2} \|\pi_t \sigma_t\|^2 + \langle \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \rangle \right), \\ u(0, x, \xi_0) = u(x), \end{cases} \quad (5.9)$$

*alors  $u$  est une utilité progressive dans l'univers d'investissement décrit dans 5.2.*

Rappelons que les opérateurs différentiels  $\mathcal{L}^\xi$ ,  $\nabla_\xi$  et  $\Delta$  sont définis dans (5.6), (5.5).

Il faut bien noter dans ce résultat que contrairement aux résultats établis dans 2.2, nous n'avons ni l'existence ni l'unicité de la solution. En effet cette dernière équation de HJB est une équation avec une condition initiale (c'est une équation de HJB *forward*) et non pas avec une condition terminale (HJB *backward*). La théorie classique développée dans 2.5 ne nous permet pas de prouver l'existence ni l'unicité. Néanmoins, s'il existe une solution  $u$  connue à une date  $T$ , alors nous pouvons, par la théorie classique, affirmer qu'elle est unique sur l'intervalle

### 5.3. Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

$[0, T]$  et possède toutes les propriétés d'une utilité progressive sur cet intervalle. Au delà, nous ne pouvons rien conclure, du moins par les techniques classiques. En particulier, comme les coefficients de cette équations aux dérivées partielles sont stochastiques nous ne pouvons pas appliquer la technique de retournement du temps.

Par ailleurs, l'équation de HJB (5.9) n'est pas forcément une condition suffisante que doit satisfaire cette utilité  $u(t, \cdot, \xi_t)$ . À ce stade, ce n'est qu'une condition nécessaire qui peut traduire la condition de *consistance avec l'univers d'investissement* introduite dans la définition 4.3 et ainsi représente l'impact de l'univers d'investissement et notamment celui de l'espace des contraintes  $\mathcal{K}$ .

*Démonstration.* On va montrer que la solution de (5.9) satisfait les trois conditions que doit vérifier, par définition, l'utilité progressive :

- (i)  $u$  est strictement concave croissante par hypothèse.
- (ii) Pour montrer la consistance avec l'univers d'investissement il suffit d'appliquer le lemme d'Itô aux processus  $u(t, X_t^\pi, \xi_t)$ , il en suit en utilisant la notation  $\Delta_{\xi, x}^\sigma u$  à la place de  $\partial_x < \nabla_\xi u, \sigma >$

$$du(t, X_t^\pi, \xi_t) = dM_t + \left( u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \frac{u''}{2} \|\pi_t \sigma_t\|^2 + < \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Delta_{\xi, x}^\sigma u > \right) (t, X_t^\pi, \xi_t) dt$$

où  $M_t$  désigne une martingale locale. En utilisant l'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (5.9), cette équation est réécrite ainsi

$$du(t, X_t^\pi, \xi_t) = dM_t + \left( u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) \right) (t, X_t^\pi, \xi_t) dt.$$

Or le terme en  $dt$  dans cette dynamique peut être majoré comme suit

$$\begin{aligned} & \left( u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) \right) (t, X_t^\pi, \xi_t) \\ & \leq \left( u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) \right) (t, X_t^\pi, \xi_t) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que les processus  $u(t, X_t^\pi, \xi_t)$  sont des surmartingales et ainsi nous obtenons la consistance avec l'univers d'investissement.



(iii) Vu la stricte concavité de  $u$ , il suffit de remarquer que l'application  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t) \mapsto \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u)$  est strictement convexe et que

$$\mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \Delta_{\xi, x}^\sigma u) \xrightarrow{\|\pi\| \rightarrow \infty} -\infty$$

car  $u'' < 0$ , ce qui induit l'existence d'une stratégie admissible. Nous expliciterons la forme de cette stratégie optimale et nous la commenterons dans le paragraphe suivant. □

### 5.3.2 Portefeuille optimal et EDP stochastiques

Nous nous intéressons à présent au terme

$$\frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left( \frac{1}{2} \|\pi\sigma\|^2 u'' + \langle \pi\sigma, u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \rangle \right)$$

dans l'équation (5.9) et particulièrement à l'existence d'une stratégie optimale. Pour cela, suivant la méthode explicitée dans la preuve du théorème 2.2, nous partons de l'identité

$$\|\pi\sigma\|^2 u'' + \langle \pi\sigma, u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \rangle = \frac{1}{2} u'' \left\| \pi\sigma + \frac{u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u}{u''} \right\|^2 - \frac{1}{2} u'' \left\| \frac{u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u}{u''} \right\|^2,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left( \frac{1}{2} \|\pi\sigma\|^2 u'' + 2 \langle \pi\sigma, u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} u'' \left\| \frac{u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u}{u''} \right\|^2 + \frac{1}{2} u'' \inf_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left\| \left( -\frac{u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u}{u''} \right) - \pi\sigma \right\|^2. \end{aligned}$$

Le passage du *supremum* à l'*infimum* est uniquement dû à l'hypothèse de stricte concavité de  $u$  (c-à-d.  $u'' < 0$ ). Enfin, pour conclure, il suffit juste de remarquer que le terme en *inf* n'est autre que la définition même de la distance de  $-u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u/u''$  à l'ensemble convexe  $\mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)\sigma_t = \mathcal{K}_t\sigma_t$  ( $t$  fixé). D'après les résultats du lemme B.5, nous rappelons que l'*inf* est atteint en un unique point (la stratégie optimale) de  $\mathbb{R}^d$  que nous noterons par  $\pi^*$  :

$$\pi_t^*(x, \xi) = \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \left( -\frac{u'\eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u}{u''} \right)(t, x, \xi).$$

### 5.3. Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

---

Par la suite, comme  $\mathcal{K}\sigma$  est un cône, il est donc positivement homogène d'après le lemme B.5 (assertion (a3)), et comme  $-u'' > 0$ , nous pouvons en déduire que

$$\pi_t^*(x, \xi) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( u' \eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \right) (t, x, \xi).$$

Ceci prouve le théorème suivant :

**Théorème 5.2.** *Soit  $u(t, \cdot, \xi_t)$  une fonction d'utilité progressive markovienne qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. Alors la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi_t^*(x, \xi_t) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( u' \eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \right) (t, x, \xi_t). \quad (5.10)$$

Il est clair que  $\pi^*$  vérifie

$$\pi_t^* \in \mathcal{K}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Par contre, il n'est pas immédiat que cette stratégie soit admissible. En effet, pour qu'elle le soit, il faut vérifier, en plus, que le portefeuille associé  $X^{x,*}$  est positif à tout instant  $t \geq 0$  (voir définition 4.2).

Nous ne vérifions pas ceci pour le moment car par définition des utilités progressive (définition 4.3, (iii)), nous avons supposé qu'il existe une stratégie admissible unique, donc  $u(t, X_t^{x,*}, \xi_t)$  est une martingale. Comme  $\pi^*$  définie dans (5.10) vérifie cette dernière hypothèse, nous avons conclu par unicité que c'est la stratégie optimale, elle est donc admissible.

Ceci nous amène naturellement à la question suivante : sous quelles hypothèses la réciproque est-elle vraie ?

En d'autres termes, si  $u$  est une fonction du temps  $t$ , de la richesse  $x$  et des cours des actifs  $\xi$  vérifiant l'EDP (5.9), sous quelles hypothèses  $u$  est-elle une utilité progressive et ainsi  $\pi^*$  définie dans (5.10) est-elle une stratégie admissible ?

De toute façon, nous montrons dans un dernier paragraphe de ce chapitre qu'il n'existe aucun lien entre l'EDP et la propriété de concavité, ce sont deux problèmes de natures différentes.

Par contre, à ce stade et en combinant ce dernier résultat avec le théorème 5.1, nous obtenons le corollaire suivant

**Corollaire 5.1.** *Soit  $u(t, \cdot, \xi_t)$  une fonction d'utilité progressive qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. Alors,  $u$  est solution de l'EDP non linéaire suivante*

$$\begin{cases} u_t(t, x, \xi_t) + r_t x u'(t, x, \xi_t) + \mathcal{L}^\xi u(t, x, \xi_t) = \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (u' \eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u) \right\|^2(t, x, \xi_t) \\ u(0, x, \xi_0) = u(x). \end{cases} \quad (5.11)$$

En plus des résultats que nous avons pu établir dans ce paragraphe, le cadre markovien que nous avons étudié ci-dessus guidera notre intuition vers une approche plus générale de cette nouvelle classe d'utilités. En effet, si nous notons par  $v$  le processus stochastique défini par

$$v(t, x) \stackrel{def}{=} u(t, x, \xi_t), \quad t \geq 0 \quad (5.12)$$

alors, il est facile de vérifier que

- $v$  est strictement concave croissante par rapport à la richesse  $x$

$$v(0, x) = u(0, x, \xi).$$

- Pour toute stratégie admissible  $\pi$ , on a presque sûrement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v(T, X_T^{x, \pi}) / \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(u(T, X_T^{x, \pi}, \xi_T) / \mathcal{F}_t) \\ &\leq u(t, x, \xi_t) = v(t, x), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

- Il existe une stratégie optimale  $\pi^*$  telle que presque sûrement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v(T, X_T^{x, \pi^*}) / \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(u(T, X_T^{x, \pi^*}, \xi_T) / \mathcal{F}_t) \\ &= u(t, x, \xi_t) = v(t, x), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $v$  est un processus d'utilité progressive issu de la condition initiale  $v(0, x) = u(0, x, \xi)$ .

Introduisons ensuite les paramètres  $\beta$  et  $\Gamma$  définis par

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &= u_t(t, x, \xi) + \mathcal{L}_t^\xi u(t, x, \xi), \\ \Gamma(t, x) &= \sum_{i=1}^{i=d} u_i(t, x, \xi) \xi^i \sigma_t^i. \end{aligned}$$

### 5.3. Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

---

Il en suit, en appliquant le lemme d'Itô au processus  $u(t, x, \xi_t)$  ( $x$  fixé), que le processus  $v$  obéit à la dynamique

$$dv(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t$$

D'autre part, d'après (5.9), nous savons que  $\beta$  est contraint par l'équation

$$\beta(t, x) = \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( u' \eta + \Delta_{\xi, x}^\sigma u \right) \right\|^2(t, x, \xi_t) - r_t x u'(t, x, \xi_t). \quad (5.13)$$

Rajoutons à cela les identités

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\partial}{\partial x} u(t, x, \xi_t), \\ v'' &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, \xi_t), \end{aligned}$$

et le fait que

$$\Delta_{\xi, x}^\sigma u(t, x, \xi_t) = \Gamma'(t, x),$$

nous montrons facilement que  $\beta$  est donné par la nouvelle formulation suivante :

$$\beta(t, x) = \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( v' \eta + \Gamma' \right) \right\|^2(t, x) - r_t x v'(t, x). \quad (5.14)$$

Nous concluons alors par ce résultat.

**Théorème 5.3.** *Soit  $u$  est une utilité progressive markovienne qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. En notant par  $v$  le nouveau champ aléatoire*

$$v(t, x) = u(t, x \xi_t),$$

*alors  $v$  est une utilité progressive dans le même univers d'investissement 5.2.*

*De plus  $v$  obéit à la dynamique*

$$dv(t, x) = \left( \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( v' \eta + \Gamma' \right) \right\|^2 - r_t x v' \right)(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t \quad (5.15)$$

où  $\Gamma(t, x) = \sum_{i=1}^{i=d} u_i(t, x, \xi) \xi^i \sigma_t^i$ . La stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( v' \eta + \Gamma' \right)(t, x). \quad (5.16)$$

**Remarque 5.1.** *Nous remarquons que les stratégies optimales dans (5.10) et (5.16) sont liées par*

$$\pi_t^*(x) = \pi_t^*(x, \xi_t). \quad (5.17)$$

Il est important de noter que ce cadre markovien est plus général que celui des exemples 4.3.1 et 4.3.2. La dynamique (5.15) ainsi que la formule de la stratégie optimale (5.16) sont identiques à la dynamique (4.32) et à l'identité (4.33) établies dans l'exemple 4.3.2. Ceci nous amène naturellement à la question suivante : si nous considérons, de manière encore plus générale, des champs aléatoires qui obéissent à une dynamique de la forme

$$du(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t, \quad (5.18)$$

est-ce que nous pouvons montrer que les utilités progressives de cette forme satisfont la dynamique (5.15) ? En d'autres termes pouvons-nous étendre les résultats précédents à une classe de paramètre  $\Gamma$  plus large ?

Ainsi le but dans les sections suivantes est le suivant :

- Étudier l'impact de l'univers d'investissements sur le paramètre  $\beta$ , à travers l'équation (5.18), ainsi que l'existence d'une stratégie admissible.
- Généraliser le théorème 5.3 ainsi que les identités (5.15) et (5.16).

## 5.4 Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

Comme il est déjà indiqué dans le paragraphe précédent, le but dans la suite est de considérer une classe plus générale d'utilités progressives où nous supposons que ce sont des processus  $(u(t, x))_{t \geq 0}$  ou encore plus précisément des semimartingales avec un paramètre spatial  $x$  obéissant à la dynamique suivante

$$du(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t, \quad (5.19)$$

où  $\beta$  et  $\Gamma$  sont des processus  $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurables.

Nous avons vu par ailleurs, dans le cadre markovien, que le paramètre  $\beta$  ne peut être quelconque. Il existe un lien très étroit entre ce paramètre, l'ensemble des

contraintes ( univers d'investissements)  $\mathcal{K}$ , la prime de marché  $\eta$  et la volatilité  $\Gamma$ , lien dont témoigne l'équation (5.14). Ainsi, ce sont les propriétés de ces paramètres qui vont nous intéresser dans toute la suite.

La première étape consiste à établir le lien entre les deux paramètres  $\beta$  et  $\Gamma$  en exploitant le rôle joué par le problème d'optimisation de portefeuille exposé dans la définition de ces utilités.

Mais avant de poursuivre nos investigations nous avons besoin d'un outil bien adapté pour pouvoir établir des résultats similaires à ceux du cadre markovien. Cet outil consiste en une formule d'Itô généralisée, appelée *formule d'Itô-Ventzel* dont l'énoncé est donné dans le paragraphe suivant.

### 5.4.1 Lemme d'Itô-Ventzel

Dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2 ainsi que dans le cadre markovien, nous avons eu souvent recours à la formule d'Itô pour vérifier les assertions de la définition de ces processus. Il est clair que, dans le cadre de ce paragraphe, et si nous voulons étudier la dynamique des processus composés  $u(t, X_t^{x,\pi})$ , ce lemme n'est plus adapté pour la simple raison que l'intégrale stochastique

$$u(t, x) = u(0, x) + \int_0^t \beta(s, x) ds + \int_0^t \Gamma(s, x) dW_s \quad (5.20)$$

est bien définie pour  $\omega \in \Omega \setminus N_x$ , où  $N_x$  est un ensemble négligeable qui dépend de  $x$ . En d'autres termes cette intégrale n'est définie que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  et  $\omega \in (\cup_x N_x)^c$ . Le problème qui se pose à ce niveau est le suivant : comme  $\cup_x N_x$  n'est pas l'union dénombrable de négligeables, il n'est pas vrai en général qu'il soit de mesure nulle. Donc pour éviter ce genre de problèmes techniques et pour que l'intégrale stochastique soit bien définie presque sûrement pour tout  $(t, x)$  et continue en  $x$  pour tout  $t$ , des hypothèses sur  $\beta$ ,  $\Gamma$  et  $u$  sont indispensables. Plus de détails sur ces problèmes techniques ainsi que leur cadre sont détaillés dans A.2, A.3 et dans [74]. Ces hypothèses ainsi que la formule d'Itô généralisée sont données dans le résultat suivant.

**Lemme 5.1** (Formule d'Itô-Ventzel). *Soient  $\mathcal{I}$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(t, x)_{t \geq 0, x \in \mathcal{I}}$  un  $\mathcal{C}^2$ -processus et une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale de la forme (5.19) tel*

que ses caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{1,0}$  et  $S_t$  une semimartingale continue à valeurs dans  $\mathcal{I}$ . Alors,  $u(t, S_t)$  est une semimartingale continue obéissant à la dynamique

$$\begin{aligned} du(t, S_t) &= u'(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}u''(t, S_t)\|\sigma(t, S_t)\|^2 dt \\ &+ \beta(t, S_t)dt + \Gamma(t, S_t)dW_t \\ &+ \langle \Gamma'(t, S_t), \sigma_t \rangle dt, \end{aligned} \tag{5.21}$$

où nous avons noté  $\sigma$  la volatilité de  $S$ .

La première ligne de cette dynamique n'est autre que la formule d'Itô classique, à laquelle nous rajoutons la partie stochastique due à  $u$  prise le long de  $S$  et enfin la variation jointe  $\langle \Gamma'(t, S_t), \sigma_t \rangle$ .

La définition des classes  $\mathcal{B}^{m,\delta}$ ,  $\mathcal{C}^m$ -processus et  $\mathcal{C}^{m'}$  semimartingales sont fournies dans les sections A.2 et A.4, ainsi que celles des semi-normes  $\|\cdot\|_{m+\delta;K}$  et  $\|\cdot\|_{m+\delta;K}^\sim$  ( $K$  compact de  $\mathbb{R}_+$ ).

Pour pouvoir appliquer ce lemme, l'hypothèse suivante est alors nécessaire dans toute la suite

**Hypothèse 5.2.** *Les caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  de la semi-martingale  $u$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{1,0}$ .*

Cette hypothèse implique que  $\beta(t, x)$  (resp.  $a(t, x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Gamma(t, x), \Gamma(t, y) \rangle$ ) admet une modification continue à valeurs dans  $\mathcal{C}^{1,0}$ , c-à-d continûment différentiable par rapport à  $x$  (resp. continûment différentiable par rapport à  $(x, y)$ ) et que  $\|\beta(t)\|_{1;K}^\sim \in L^1$  p.s. (resp.  $\|a(t)\|_{1;K}^\sim \in L^1$  p.s.) pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}_+$ .

#### 5.4.2 Lemme d'Itô-Ventzel et consistance avec l'univers d'investissement

Soit  $u$  un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}(\mathcal{K})$  (définition 5.2) vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors, en appliquant le lemme d'Itô-Ventzel au processus  $u(t, X_t^{x,\pi})$  pour  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$ , il s'en suit que

$$\begin{aligned} u(t, X_t^{x,\pi}) &= (\beta + u'r_t X_t^{x,\pi} + \langle \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi}) dt \\ &+ (\Gamma + u' \pi_t \sigma_t)(t, X_t^{x,\pi}) dW_t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Comme  $u$  est une utilité progressive, par hypothèse, les propriétés de consistance avec l'univers d'investissement et d'existence d'une stratégie optimale se traduisent alors par :

- **Consistance avec l'univers d'investissement** : Pour toute stratégie admissible  $\pi \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$ , on a  $\forall t \geq 0, x > 0$

$$(\beta + u'r_t X_t^{x,\pi} + \langle \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi}) \leq 0.$$

- **Existence d'un optimum** : Il existe une stratégie admissible  $\pi^*$  telle que  $\forall t \geq 0, x > 0$

$$(\beta + u'r_t X_t^{x,\pi^*} + \langle \pi_t^* \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t^* \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi^*}) = 0.$$

Pour conclure, le lemme d'Itô-Ventzel est largement suffisant pour traduire la propriété de surmartingale des processus  $u(t, X_t^{x,\pi})$ ,  $\pi \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$  (exprimée par la première inégalité) ainsi que la propriété de martingale pour une richesse particulière (exprimée par la seconde équation ci-dessus). Nous notons qu'en particulier ces équations traduisent uniquement le comportement de  $u$  tout au long des trajectoires admissibles et qu'en aucun cas elles ne permettent de caractériser  $u$  par rapport à  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , notamment la dernière identité qui n'est vraie que sur la trajectoire optimale.

La question que nous pouvons nous poser à ce niveau est la suivante : pouvons-nous remplacer  $X_t^{x,\pi^*}$  par  $x$  ? Car si c'est possible alors nous pouvons déduire que  $u$  satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante

$$(\beta + x u' r_t + \langle \pi_t^* \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t^* \sigma_t\|^2)(t, x) = 0, \quad \forall t \geq 0, x > 0.$$

Or, en général, ceci n'est pas possible car il faudrait plus d'hypothèses sur l'univers d'investissement. Par exemple, il faut que

- la richesse optimale visite un ensemble assez riche en valeurs  $x > 0$  et ce pour tout  $t \geq 0$ .



- ou tout simplement que nous pouvons, à tout instant  $t \geq 0$ , partir d'une richesse  $x$ .

C'est surtout cette dernière hypothèse qui nous intéresse. Dans le paragraphe suivant, nous donnons une condition, sur l'ensemble des stratégies admissibles, qui permettra de satisfaire cette hypothèse et par conséquent déduire des vraies équations de HJB.

### 5.4.3 Principe de la programmation dynamique

Le but dans la suite est d'établir l'équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman que satisfait une utilité progressive dans l'univers d'investissement  $(r, \eta, \mathcal{K})$  décrit dans le paragraphe 4.2, en utilisant essentiellement les résultats et les techniques que nous avons établis et développés dans le deuxième chapitre de ce manuscrit.

Pour cela, nous avons vu dans le paragraphe 2.5 que pour pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique, quelques hypothèses sont indispensables, notamment l'hypothèse appelée *hypothèse de recollement* 2.3, que nous rappelons ici :

**Hypothèse 5.3.** *Pour toutes stratégies  $\pi^1$  admissible entre la date 0 et la date  $t_1$  et  $\pi^2$  admissible entre la date  $t_1$  et la date  $t_2$ , la stratégie  $\pi$  associée au vecteur de proportions  $\delta$  défini par  $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0, t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1, t_2]}$  est une stratégie admissible sur l'intervalle  $[0, t_2]$  quels que soient  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2$ .*

$\delta^1$  et  $\delta^2$  désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies  $\pi^1$  et  $\pi^2$ .

Sous cette hypothèse, nous pouvons remarquer que les assertions (ii) et (iii) de la définition 4.3 des utilités progressives deviennent :

- ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** pour toute stratégie admissible  $\mathcal{P}$ , et pour toute richesse initiale  $x$  à l'instant  $s$ , nous avons  $\forall t \geq r \geq s$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{s, x, \pi}) / \mathcal{F}_r) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{r, X_r^{s, x, \pi}, \pi}) / \mathcal{F}_r) \leq u(r, X_r^{s, x, \pi}). \quad (5.23)$$

iii) **Existence d'un optimum** : Pour toute richesse initiale  $x$  à la date  $s$ , il existe une unique stratégie admissible optimale, notée  $\pi^*$ , pour laquelle nous avons

$$\mathbf{E}(u(t, X_t^{r, X_r^{s, x, \pi^*}}, \pi^*) / \mathcal{F}_r) = u(r, X_r^{s, x, \pi^*}), \quad \forall t \geq r \geq s. \quad (5.24)$$

Nous remarquons que l'équation (5.24) peut se réécrire en tenant compte de l'optimalité de  $\pi^*$  sous la forme

$$u(t, x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \mathbf{E}(u(T, X_T^{t, x, \pi}) / \mathcal{F}_t) \quad \text{pour tout } T \geq t \geq s$$

où nous rappelons que  $\mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)$  désigne l'ensemble des stratégies admissibles dans  $\mathcal{K}$  pour une richesse initiale  $x$  à la date  $t$ . Il en suit que, sous l'hypothèse de recollement 5.3, une utilité progressive  $u$  n'est autre que sa propre fonction valeur.

En d'autres termes, si l'investisseur a choisi de suivre la stratégie  $\pi^1$  dans l'intervalle de temps  $[0, t_1]$ , alors, quelle que soit la nouvelle stratégie qu'il considère entre  $t_1$  et  $t_1 + \varepsilon$ , elle ne lui apportera pas plus de satisfaction sauf si la stratégie  $\pi^2$  est optimale.

Cette remarque est fondamentale car elle met en valeur le rôle de la dimension temps dans ce genre de problème d'optimisation. En effet, nous pouvons réinterpréter ces nouvelles assertions comme suit : quelle que soit la stratégie  $\pi^1$  que l'investisseur a suivi jusqu'à la date d'aujourd'hui " $t_1$ ", il a intérêt à retrouver *rapidement* sa stratégie optimale partant de la richesse réalisée jusque-là, c-à-d.,  $X_{t_1}^{s, x, \pi^1}$ , sinon il vaudrait mieux s'arrêter tout de suite. En effet, dans le cas contraire, au fur et à mesure que le temps s'écoule les stratégies deviennent moins performantes (à l'exception de la stratégie optimale) et l'investisseur s'éloigne de plus en plus de ses objectifs. Par contre, ceci ne veut, en aucun cas, dire qu'en identifiant sa stratégie optimale à partir d'aujourd'hui (c-à-d., " $t_1$ "), l'investisseur retrouve son état d'équilibre. Ceci n'est vrai que si  $\pi^1$  était optimale. Par contre il ne s'éloignera pas davantage de son idéal et ne cumulera pas plus de pertes.

### 5.4.4 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Le but de ce paragraphe est de montrer, comme dans le cadre markovien, que  $u$  est solution d'une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman similaire à celle (5.1) étudiée dans le cadre markovien, et traduisant l'impact de la consistance avec l'univers d'investissement sur le drift  $\beta$ . Un premier résultat s'annonce alors comme suit :

**Théorème 5.4.** *Soit  $u$  un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché  $\mathcal{M}^{r,n}$  vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors,  $u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles à coefficients stochastiques suivante*

$$\beta(t, x) + u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi) = 0, \quad (5.25)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t, x, \pi) = \left[ \langle \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2 \right] (t, x). \quad (5.26)$$

En d'autres termes, le drift de cette utilité stochastique  $u$  ne peut être un simple paramètre vérifiant l'hypothèse (5.2). Le processus  $\beta$  est fortement contraint par l'univers d'investissement. Ceci implique en particulier que  $u$  doit être "adaptée" à cet univers de manière dynamique. Ceci se traduit par l'évolution, en temps, donnée par

$$du(t, x) = - \left( u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi) \right) dt + \Gamma(t, x) dt.$$

Enfin, remarquons que cette dynamique décrit uniquement l'évolution par rapport au temps de ce processus d'utilité. Elle n'est pas donc suffisante pour traduire le comportement de  $u$  par rapport à la variable  $x$ , notamment la propriété de concavité.

*Démonstration.* (Théorème 5.4) En utilisant (5.4) et en appliquant le lemme d'Itô-Ventzel au processus composé  $u(s, X_s^{t,x,\pi})$  où  $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$  est une stratégie admissible quelconque, entre les dates  $t$  et  $t + h$ , il en découle que, pour tout  $t \geq s$ , on a

$$u(t + h, X_{t+h}^{t,x,\pi}) = M_t + u(t, x) + \int_t^{t+h} (\beta(s, X_s^{t,x,\pi}) + u' r_s X_s^{t,x,\pi} + \mathcal{P}(s, X_s^{t,x,\pi}, \pi)) ds$$

#### 5.4. Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

où on désigne par  $M$  une martingale locale, et par  $\mathcal{P}$  l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t, x, \pi) = \left[ \langle \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma'(t, x) \rangle + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2 \right]. \quad (5.27)$$

Vues les hypothèses de continuité portées sur  $u, \beta$  et  $\Gamma$ , nous pouvons faire le même raisonnement explicité dans le paragraphe 2.5 et les paragraphes précédents. Nous obtenons alors, en faisant tendre  $h$  vers 0, que la condition de compatibilité avec l'univers d'investissement est équivalente à

$$\beta(t, x) + u' r_t x + \mathcal{P}(t, x, \pi) \leq 0, \text{ p.s. } \forall \pi \in \mathcal{K}_t. \quad (5.28)$$

Par conséquent

$$\beta(t, x) + u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi) \leq 0, \text{ p.s.} \quad (5.29)$$

D'après la définition 4.3 assertion (iii) de ces utilités, il existe une stratégie optimale notée  $\pi^*$  telle que  $(u(s, X_s^{t,x,\pi^*}))_{s \geq t}$  est une martingale. Cela se traduit par l'équation

$$\beta(t, x) + u' r_t x + \mathcal{P}(t, x, \pi^*) = 0, \text{ p.s.} \quad (5.30)$$

ce qui, combiné avec (5.29), suggère que

$$\beta(t, x) + u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi) = 0, \text{ p.s.} \quad (5.31)$$

Ceci achève la démonstration. □

### 5.4.5 Stratégie optimale

Le but de cette sous-section est de donner une caractérisation explicite de la stratégie optimale, supposée exister et être unique. Par conséquent, nous nous intéressons au programme de maximisation suivant

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi).$$

Pour cela, nous commençons par réécrire  $\mathcal{P}(t, x, \pi)$  sous la forme plus simple suivante

$$\mathcal{P}(t, x, \pi) = \frac{u''}{2} \left( \left\| \pi_t \sigma_t + \frac{u' \eta_t + \Gamma'(t, x)}{u''} \right\|^2 - \left\| \frac{u' \eta_t + \Gamma'(t, x)}{u''} \right\|^2(t, x) \right).$$

D'après la stricte concavité de  $u$  (voir la définition 4.3, assertion (i)), il en découle que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, x, \pi) = -\frac{u''}{2} \|u' \eta_t + \Gamma'(t, x)\|^2 + \frac{u''}{2} \inf_{\pi \in \mathcal{K}_t} \left\| \frac{-(u' \eta_t + \Gamma')}{u''}(t, x) - \pi_t \sigma_t \right\|^2.$$

Pour conclure, nous remarquons enfin que le terme en l'*inf* dans cette dernière équation n'est autre que la distance au carré entre le point  $-(u' \eta_t + \Gamma')/u''(t, x)$  de  $\mathbb{R}^d$  et le cône convexe  $\mathcal{K}_t \sigma_t$ , ce qui implique l'existence et l'unicité de la stratégie optimale. Elle est alors donnée par

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (u' \eta_t + \Gamma')(t, x),$$

d'où le théorème suivant :

**Théorème 5.5.** *Soit  $u$  est une utilité progressive. Sous les mêmes hypothèses que le théorème 5.4, la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (u' \eta_t + \Gamma')(t, x). \quad (5.32)$$

Nous noterons que cette identité est identique à (5.16) établie dans le théorème 5.3 dans le cas markovien et à celle de l'exemple 4.3.2, équation (4.33). Nous remarquons aussi, comme  $u$  est une utilité progressive, que le processus de richesse optimal noté par  $X^{x, \pi^*}$ , c-à-d.  $\pi_t^* = \pi_t^*(X_t^{x, \pi^*})$ , est unique.

Si nous réécrivons la formule (5.32) en mettant  $u'$  en facteur, il vient que

$$\pi_t^*(x) \sigma_t = -\frac{u'}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left[ \eta_t + \frac{\Gamma'}{u'} \right] (t, x). \quad (5.33)$$

Cette formulation permet d'interpréter la quantité  $\Gamma'/u'$  comme une prime de risque supplémentaire purement générée par le processus d'utilité progressive  $u$  et dépendant de la richesse de l'agent ou encore comme une nouvelle direction optimale d'investissement.

Le fait que l'utilité d'un investisseur soit stochastique lui permet d'intégrer au mieux son comportement par rapport à toutes les informations dont il a accès et au nouvel état du marché. En outre, cette utilité va lui permettre de générer une prime de risque  $\frac{\Gamma'}{u'}$  qui vient se rajouter à celle du marché, c-à-d.  $\eta$ . En d'autres termes, le fait de considérer une utilité mieux adaptée à

#### 5.4. Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

son univers d'investissement augmente le profil de l'investisseur et corrige de manière dynamique ses stratégies et ses positions dans le marché.

Remarquons que le terme  $u'/u''$  n'est autre que la tolérance au risque définie comme l'inverse de l'aversion absolue au risque (1.12).

Le cas particulier  $\eta \equiv 0$  implique que

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'}{u''}(t, x),$$

et donc que le terme  $\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'$  est proportionnel à la richesse optimale. Ce cas particulier montre qu'il est indispensable de mieux comprendre le rôle joué par le paramètre  $\Gamma$ .

Notons que nous n'avons pas eu à vérifier que cette stratégie optimale est admissible dans le sens où nous n'avons pas montré que presque sûrement, la richesse optimale associée est positive à tout instant pour la simple raison que par hypothèse (définition 4.3 (iii)), la stratégie optimale (admissible) est l'unique stratégie telle que  $u(t, X_t^{x, \pi^*})$  soit une martingale. Comme  $\pi^*$  ci-dessus satisfait cette condition, nous avons pu conclure. Nous reviendrons dans la suite à la question d'admissibilité d'une telle stratégie de la forme (5.32).

**Remarque 5.2.** *Il est important de remarquer que la stricte concavité a joué un rôle décisif pour établir ce résultat. En effet, comme  $u'' < 0$ , l'opérateur  $\mathcal{P}$  ci-dessus est strictement convexe par rapport à  $\pi$ , ce qui implique l'existence d'une stratégie admissible. Dans le cas contraire, le terme  $\sup_{\pi \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(t, x, \pi)$  peut exploser.*

Pour résumer, nous combinons ces deux derniers théorèmes pour en conclure que :

**Théorème 5.6.** *Soit  $u$  un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché  $\mathcal{M}^{r, \eta}$  vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors,*

- (i)  *$u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles à coefficients stochastiques suivante*

$$\beta(t, x) + u'r_t x - \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'(t, x)] \right\|^2 = 0. \quad (5.34)$$

(ii) La stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'](t, x). \quad (5.35)$$

Par conséquent, le processus de richesse optimale satisfait

$$\begin{cases} dX_t^{x,\pi^*} = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'](t, X_t^{x,\pi^*}) \\ X_0^{x,\pi^*} = x \end{cases} \quad (5.36)$$

Ce théorème met en évidence que le couple formé de l'univers d'investissements  $(\mathcal{M}^{r,\eta}, \mathcal{K})$  et de la dérivée de la volatilité  $\Gamma$  par rapport à  $x$  décrit complètement l'évolution du processus d'utilité  $u$  par rapport à la variable temps. Le drift  $\beta$  s'interprète comme le meilleur compromis entre univers d'investissement et risque d'utilité représenté par le paramètre  $\Gamma$ . Il peut être encore interprété comme la meilleure combinaison entre prime de marché  $\eta$  et prime d'utilité  $\Gamma'/u'$ .

D'autre part, il est clair à partir de l'équation (5.35) que la dérivée de  $\Gamma$  par rapport à la richesse intervient aussi au niveau de la stratégie optimale, cela de manière très significative car c'est la volatilité  $\Gamma$  qui fixe la stratégie optimale dans ce marché. En effet, deux investisseurs qui n'ont pas la même volatilité  $\Gamma$  (utilités) n'ont pas la même stratégie optimale même dans le cas où la projection des dérivées en  $x$  de ces volatilités sur l'espace des contraintes est la même, puisque les utilités ne sont pas identiques, notamment les aversions au risque. Pour mettre l'accent sur cette contrainte imposée sur le drift de l'utilité, une conséquence directe de ce théorème est donnée par le corollaire suivant :

**Corollaire 5.2.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si  $u$  est une utilité progressive sur le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ , alors elle est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$du(t, x) = \left\{ \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'] \right\|^2 - u'r_t x \right\} (t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t. \quad (5.37)$$

Ainsi nous retrouvons la même dynamique établie dans le cadre markovien (théorème 5.3, équation (5.15)) et dans le cadre de l'exemple 4.3.2 (équation (4.32)).

#### 5.4. Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

---

Nous avons vu dans le cadre particulier des exemples 4.3.1 et 4.3.2 où la volatilité  $\Gamma$  est de la forme  $au + xu'b$  (voir l'identité (4.28)) que nous pouvons résoudre cette EDP stochastique complètement non-linéaire. Cependant, nous avons vu aussi, dans ces exemples relativement simples, que la solution étant donnée une condition initiale n'est pas unique puisque le choix des paramètres de diffusion des processus  $Y$  et  $Z$  ne le sont pas. Le cadre de ce théorème est encore beaucoup plus compliqué pour les raisons suivantes :

- La forme de la volatilité  $\Gamma$  peut être quelconque.
- Il est très difficile de donner une interprétation financière, outre le fait que  $\Gamma'/u'$  joue le rôle d'une prime de marché, ce qui aurait pu nous permettre d'imposer plus de contraintes sur ce paramètre. Par exemple, avoir la forme  $au + xu'b$ , ou encore être un opérateur de  $u$  et de ses dérivées jusqu'à un ordre précis ...
- Il n'est pas évident, voir très difficile, de faire le lien entre cette dynamique (5.37) et la propriété de concavité. D'ailleurs, dans le paragraphe suivant, nous montrerons que cette dynamique en plus d'une condition initiale est insuffisante pour que  $u$  soit une utilité progressive. Nous donnerons un contre-exemple de processus vérifiant (5.37) alors qu'ils ne sont pas concaves.
- À cela se rajoute le fait que, contrairement aux cadres des exemples 4.3.1 et 4.3.2, l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  est un cône convexe fermé qui évolue de manière stochastique et il peut, surtout, dépendre de la richesse. Donc outre la non-linéarité de l'opérateur  $\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t}$ , il est assez compliqué, sauf dans des cas particuliers, d'explicitier le comportement de

$$\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t} (\Gamma' + u'\eta)$$

par rapport à la variable  $x$ . Par exemple, si  $\Gamma'$  est dérivable, cela implique-t-il que  $\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t} (\Gamma' + u'\eta)$  le soit ?

- À notre connaissance, il n'existe pas de travaux sur ce type d'EDP stochastiques.

Pour toutes ces raisons, ainsi que pour les problèmes que nous venons de mettre en évidence, il devient crucial de mieux comprendre le rôle de  $\Gamma$  dans toutes ces



questions. Le chapitre suivant sera dédié dans un premier temps à simplifier la dynamique (5.37) pour mettre plus en évidence le processus  $\Gamma$ .

**Remarque 5.3.** *Soit  $u$  un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché  $\mathcal{M}^{r,n}$  vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors, en combinant (5.37) et l'hypothèse 5.2, on obtient*

$$\begin{cases} \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [u' \eta_t + \Gamma'] \right\|^2 - u' r_t x \in \mathcal{B}^{1,0}, \\ \Gamma \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \quad (5.38)$$

*Cette hypothèse n'est que la condition nécessaire pour utiliser la formule d'Itô généralisée. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, nous ne pouvons composer  $u$  avec une richesse admissible quelconque. De plus, la définition 4.3 n'aura plus de sens.*

**La dynamique (5.37) est une condition nécessaire non suffisante.** Soit  $u$  une semimartingale deux fois dérivable en  $x$  telle que ( $u'' \neq 0$ ) et suivant la dynamique (5.37) et vérifie l'hypothèse, indispensable pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, suivante :

**Hypothèse 5.4.**

$$\begin{cases} \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [u' \eta_t + \Gamma'(t, x)] \right\|^2 - u' r_t x \in \mathcal{B}^{1,0}, \\ \Gamma \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Le but de cette section est de répondre à la question suivante :  $u$  est-elle concave ?

La réponse à cette question est négative. Voici un contre-exemple :

En effet si nous reprenons l'exemple 4.3.2 avec  $Z \equiv 1$  et sans faire l'hypothèse que  $v$  est une fonction d'utilité, c-à-d.  $v$  est une simple fonction deux fois dérivable, alors en appliquant le lemme d'Itô au processus  $u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} v(xH_t^{r,n})$ , nous obtenons

$$du(t, x) = \left( -xu' r_t + \frac{1}{2} u'' \|\eta_t\|^2 \right) (t, x) dt - xu'(t, x) \eta_t dW_t. \quad (5.40)$$

Notons  $\Gamma(t, x) = -xu'(t, x) \eta_t$  et remarquons que

$$\Gamma'(t, x) + u'(t, x) \eta_t = -xu''(t, x) \eta_t.$$

#### 5.4. Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

---

Si, de plus,  $\eta\sigma^{-1}$  est une stratégie admissible, alors

$$\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\Gamma'(t, x) + u'(t, x)\eta_t) = -xu''(t, x)\eta_t. \quad (5.41)$$

Par suite, la quantité  $\frac{1}{2u''} \|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\Gamma' + u'\eta_t)\|^2$  est bien définie, même si  $u''$  s'annule car nous avons l'identité

$$\frac{1}{2u''} \|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\Gamma' + u'\eta_t)\|^2 = \frac{u''}{2} \|\eta_t\|^2.$$

Il en résulte que la dynamique (5.40) peut facilement se réécrire sous la forme (5.37) du corollaire 5.2, c-à-d.

$$du(t, x) = \left[ \frac{1}{2u''} \|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (\Gamma' + u'\eta_t)\|^2 - xu'r_t \right](t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t. \quad (5.42)$$

Ceci prouve que le processus  $u$  obéit bien à la dynamique d'une utilité progressive, sans pour autant vérifier ni la concavité ni la monotonie. En d'autres termes, l'EDP stochastique (5.37) n'implique pas la concavité de la solution, si elle existe. Ceci est plutôt intuitif car cette EDP stochastique traduit uniquement l'évolution dans le temps de  $u$ , à  $x$  fixé. Donc de manière générale, l'équation (5.37) n'explique pas le comportement de  $u$  en  $x$ . Il faut donc séparer la question de concavité et celle de la dynamique car ce sont deux problèmes de nature différente.



# Chapitre 6

## Utilités progressives et changement de numéraire

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>178</b>
<b>6.2</b>	<b>Changement de numéraire . . . . .</b>	<b>179</b>
6.2.1	Le nouvel univers d'investissement : . . . . .	182
6.2.2	Stabilité de la notion des utilités progressives par changement de numéraire . . . . .	183
<b>6.3</b>	<b>Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS</b>	<b>185</b>
6.3.1	Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	185
6.3.2	Stratégie optimale . . . . .	186
6.3.3	EDP stochastiques . . . . .	188
6.3.4	Équations de HJB par rapport au nouvel espace de contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$ . . . . .	190
<b>6.4</b>	<b>Utilités progressives et Portefeuilles Martingales</b>	<b>192</b>
6.4.1	Le cas où $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ . . . . .	193
6.4.2	Le cas où $\mathcal{K}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	196

---

*Résumé : Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives sont difficiles à étudier, car com-*

plètement non linéaires et non intuitives. Dans ce chapitre, nous approfondissons la question du changement de numéraire abordée dans l'exemple 4.3.2 du chapitre 4. Nous montrons comment notre définition des utilités progressives 4.3, contrairement à celle de Zariphopoulou et al., laisse cette nouvelle notion invariante par changement de numéraire. Nous montrons uniquement par vérification qu'il existe une équivalence entre les utilités progressives d'un marché et celles d'un second, obtenu à partir du premier par un changement de numéraire dans le théorème 6.1. Dans la section 6.3, nous établissons les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives d'un nouveau marché de numéraire  $Y$  (un processus d'Itô). Ces équations peuvent être beaucoup plus compliquées que celles du chapitre précédent, si le numéraire est quelconque : les contraintes sur les portefeuilles dans le nouveau monde ne sont pas en général des cônes convexes et les opérateurs de projection sont plus compliqués et perdent beaucoup de leurs propriétés essentielles. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'un numéraire très particulier et qui est le numéraire de marché noté  $(H^{r,\eta})^{-1}$ . Le nouvel univers d'investissement est alors un univers où les richesses admissibles sont des martingales locales, c-à-d. que le taux court et la prime de marché sont nulles ( $\tilde{r} = 0, \tilde{\eta} = 0$ ). Par contre les contraintes  $\tilde{\mathcal{K}}$  ne sont pas des cônes sauf si les contraintes de départ  $\mathcal{K}$  sont soit des espaces vectoriels soit  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ . Les EDP stochastiques sont alors beaucoup plus simples et intuitives. Ce qui nous permet de simplifier les calculs et surtout, avec beaucoup moins de paramètres, de mieux comprendre les enjeux et le rôle de la volatilité  $\Gamma$ .

## 6.1 Introduction

Nous avons vu dans le cas particulier de l'exemple 4.3.2 du chapitre précédent où  $Z = 1$ , que toute fonction d'utilité  $v$  est une utilité progressive dans un univers d'investissement où les processus de richesses sont des martingales locales sous la probabilité  $\mathbb{P}$  et dans lequel la stratégie  $\pi \equiv 0$  est une stratégie admissible. Nous avons vu aussi que si nous considérons un processus strictement positif  $Y$  dont la volatilité  $\delta$  est telle que  $\delta\sigma^{-1}$  est une stratégie admissible,

alors le nouveau processus  $u$  défini par

$$u(t, x) = v\left(\frac{x}{Y_t}\right)$$

est une utilité progressive dans un nouveau univers d'investissement déduit du premier (voir 4.13) et dans lequel les processus de richesses sont donnés par

$$\frac{X^\pi}{Y}, \text{ pour } \pi \in \mathcal{K}.$$

Nous avons vu aussi dans le même exemple 4.3.2 qu'un changement de numéraire modifie les primes de risque, le taux court ainsi que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  (voir 4.13 pour plus de détails).

Une première partie de ce chapitre sera alors dédiée à la généralisation de ce résultat. Dans une seconde partie, nous étudierons la possibilité de se placer dans un numéraire particulier dans lequel, à la fois, le taux court et la prime de marché sont nuls. En effet, ceci va nous permettre de simplifier de manière très significative la dynamique (5.37) d'une utilité progressive ainsi que l'expression (5.35) de la stratégie optimale pour devenir simplement de la forme :

$$du(t, x) = \frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma' \right\|^2(t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t, \quad (6.1)$$

$$\pi_t^*(x) \sigma_t = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma'(t, x), \quad (6.2)$$

ceci dans un nouveau univers d'investissement que nous décrirons dans le paragraphe qui suit.

## 6.2 Changement de numéraire

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, le but de cette première section est de généraliser le résultat établi dans un cas particulier ; celui de l'exemple 4.3.2. Pour cela, nous considérons, à la place d'une simple fonction d'utilité classique  $v$ , une fonction  $(v(t, \cdot))_{t \geq 0}$  qui peut être éventuellement un processus stochastique. Cette fonction doit vérifier la condition minimale suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad x \mapsto v(t, x) \text{ est un processus strictement concave croissante.}$$

Nous définissons alors le nouveau processus  $u$  de la manière suivante

$$u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} v(t, \frac{x}{Y_t}). \quad (6.3)$$

Nous ne considérons que des processus  $Y$  continus et strictement positifs et ce afin de garder les propriétés de la stricte monotonie et de la concavité de  $u$ . La question qui se pose alors est la suivante : la propriété de concavité portée sur  $v$  est-elle suffisante pour que les assertions (ii) et (iii) de la définition 4.3 soient satisfaites par le nouveau processus  $u$  défini par (6.3) ?

La réponse à cette question est donnée par le résultat suivant :

**Théorème 6.1.** *Le processus  $u$  défini dans (6.3) est une utilité progressive sur le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  si et seulement si  $v$  est une utilité progressive dans un marché où les richesses sont donnés par*

$$\tilde{X}^\pi = \frac{X^\pi}{Y}, \quad \text{pour } \pi \in \mathcal{K}. \quad (6.4)$$

Notons  $X^{x,u}$  et  $\tilde{X}^{x,v}$  respectivement les processus de richesses optimales générés par  $u$  et  $v$ . Alors, on a

$$\tilde{X}^{x,v} = \frac{X^{x,u}}{Y_t}.$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est basée sur le fait que la définition 4.3 est invariante par changement de numéraire. En effet, supposons que  $u$  est une utilité progressive sur le marché de départ  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ . Il est alors facile de vérifier que

(i) **Concavité :** L'application  $x \mapsto v(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, xY_t)$  est strictement concave croissante ( $Y > 0$ ).

(ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** Comme  $u$  est une utilité progressive, alors pour toute stratégie admissible  $\pi$  et  $\forall s \geq t \geq 0$ , on a

$$\mathbb{E}\left(u(s, X_s^{t,x,\pi})/\mathcal{F}_t\right) \leq u(t, x),$$

ce qui est encore équivalent,  $\forall s \geq t \geq 0$  et  $\forall \tilde{\pi}$  admissible, à

$$\begin{aligned} v(t, \frac{x}{y}) = u(t, x) &\geq \mathbb{E} \left( u(s, X_s^{t,x,\pi} Y_s^{t,y}) \frac{1}{Y_s^{t,y}} / \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left( u(s, \tilde{X}_s^{t,x,\tilde{\pi}}) \frac{1}{Y_s^{t,y}} / \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left( v(s, \tilde{X}_s^{t,\frac{x}{y},\tilde{\pi}}) / \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

où  $(Y_s^{t,y})_{s \geq t}$  désigne le processus  $Y$  partant du nombre  $y$  à la date  $t$ .

Ceci prouve la consistance du processus  $v$  avec le nouvel univers d'investissement.

- (iii) **Existence d'un optimum** : Comme  $u$  est une utilité progressive, la richesse optimale existe et est notée par  $X^u$ . Par conséquent, il est facile de voir que le processus  $\tilde{X}^v \stackrel{def}{=} X^u Y$  est optimal pour le problème d'optimisation associé à  $v$ .

□

**Remarque 6.1.** *Le fait que la définition 4.3 soit invariante par changement de numéraire est essentiellement dû au fait que, contrairement à la définition donnée par M. Marek et T. Zariphopoulou [84], nous n'actualisons pas les richesses. En effet, nous avons remarqué qu'un changement de numéraire modifie le taux court en particulier, donc la définition dans [84] n'est pas adaptée à ce type d'opération, ce qui n'est pas le cas de la définition 4.3 proposée ici.*

À ce stade, le résultat 6.1 que nous venons d'établir est un résultat assez général. Dans le but d'établir les nouvelles dynamiques des utilités progressives dans de nouveaux univers d'investissement, quelques précisions sont nécessaires. Pour commencer, nous supposons que le numéraire  $Y$  obéit à la dynamique suivante :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t, \quad Y_0 = 1. \quad (6.5)$$

Ceci va nous permettre en particulier de définir l'univers d'investissement à partir de celui présenté dans le paragraphe 5.2 et du processus  $Y$  comme suit.



### 6.2.1 Le nouvel univers d'investissement :

L'idée du changement de numéraire est simplement inspirée du théorème 6.1 qui consiste à considérer les mêmes richesses  $X^\pi$  du marché initial et de les exprimer en unités de  $Y$ . C'est cette idée qui nous intéresse et non pas de se placer dans un nouveau marché complètement différent avec des nouveaux actifs. Dans ce sens, les richesses sont ainsi formulées

$$\frac{X^\pi}{Y}, \text{ pour } \pi \in \mathcal{K}.$$

Pour se rapprocher du cadre du marché de départ, nous commençons par établir la dynamique du processus  $X^\pi/Y$ . En appliquant le lemme d'Itô, nous obtenons la dynamique suivante :

$$d\frac{X_t^\pi}{Y_t} = (r_t - \alpha_t + \langle \delta_t, \eta_t \rangle) \frac{X_t^\pi}{Y_t} dt + \left( \frac{\pi_t}{Y_t} \sigma_t - \frac{X_t^\pi}{Y_t} \delta_t \right) (dW_t + (\eta_t - \delta_t) dt). \quad (6.6)$$

En se basant sur cette équation, nous pouvons alors définir un nouvel univers d'investissement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} = r - \alpha + \langle \delta, \eta \rangle : \text{le nouveau taux court,} \\ \tilde{\eta} = \eta - \delta : \text{la nouvelle prime de marché,} \\ \tilde{\pi} = \frac{\pi}{Y} - \frac{X^\pi}{Y} \delta \sigma^{-1} : \text{les nouvelles stratégies,} \\ \tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \frac{X^\pi}{Y} : \text{les nouvelles richesses,} \\ \tilde{\mathcal{K}} = \frac{\mathcal{K}}{Y} - \tilde{x} \delta \sigma^{-1} : \text{le nouvel espace de contraintes,} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

ce qui implique que

$$d\tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \tilde{r}_t \tilde{X}^{\tilde{\pi}} dt + \tilde{\pi}_t \sigma_t (dW_t + \tilde{\eta}_t dt), \quad \tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}. \quad (6.8)$$

Comme la propriété d'autofinancement est invariante par changement de numéraire, ces nouvelles richesses ainsi formulées sont admissibles dans ce nouveau marché.

**Définition 6.1.** *Un tel marché, défini à partir de  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  par le changement de numéraire  $Y$ , sera noté  $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$ .*

**Remarque 6.2.** *Il est important de noter, à ce niveau, que le nouvel espace des contraintes  $\tilde{\mathcal{K}}$  est une multiplication positive suivie d'une translation du cône  $\mathcal{K}$ . Il est par conséquent un ensemble convexe fermé. Cependant, et en général,  $\tilde{\mathcal{K}}$  n'est pas un cône pour la simple raison qu'il n'est pas stable par multiplication positive. L'opérateur de projection sur cet ensemble, s'il est défini, ne peut alors avoir les mêmes propriétés que celui de la projection sur un cône convexe fermé (voir lemme B.5). Nous reviendrons en détail sur cette remarque dans la suite et nous verrons en quoi ceci est important.*

### 6.2.2 Stabilité de la notion des utilités progressives par changement de numéraire

Nous supposons, dans la suite, que  $u$  et  $v$  obéissent aux dynamiques respectives suivantes

$$du(t, x) = \beta_u(t, x)dt + \Gamma_u(t, x)dW_t. \quad (6.9)$$

$$dv(t, x) = \beta_v(t, x)dt + \Gamma_v(t, x)dW_t. \quad (6.10)$$

Comme c'était le cas dans le chapitre précédent, et afin de pouvoir appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, l'hypothèse suivante est requise.

**Hypothèse 6.1.** *Les caractéristiques locales  $(\beta_v, \Gamma_v)$  de  $v$ , vérifient l'hypothèse 5.2, c-à-d  $(\beta_v, \Gamma_v) \in \mathcal{B}^{1,0}$ .*

Sous cette dernière hypothèse, nous établissons le résultat suivant :

**Théorème 6.2.** *Si  $v$  est une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale et un  $\mathcal{C}^2$ -processus vérifiant l'hypothèse 6.1, alors le processus  $u$  défini par*

$$u(t, x) = v\left(t, \frac{x}{Y_t}\right)$$

*est une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale et un  $\mathcal{C}^2$ -processus qui évolue selon la dynamique*

$$du(t, x) = \beta_u(t, x)dt + \Gamma_u(t, x)dW_t, \quad (6.11)$$

où

$$\begin{cases} \beta_u(t, x) = \left( \beta_v - \frac{x}{Y_t} < \Gamma'_v, \delta_t > + \frac{x}{Y_t} v'(\|\delta_t\|^2 - \alpha_t) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{Y_t} \right)^2 v'' \|\delta_t\|^2 \right) \left( t, \frac{x}{Y_t} \right) \\ \Gamma_u(t, x) = \left( - \frac{x}{Y_t} v' \delta_t + \Gamma_v \right) \left( t, \frac{x}{Y_t} \right). \end{cases} \quad (6.12)$$

De plus, ses caractéristiques locales  $(\beta_u, \Gamma_u)$  vérifient l'hypothèse 5.3.

*Démonstration.* Nous commençons par établir les identités (6.12). Pour cela, et comme  $v$  satisfait les hypothèses requises pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, en utilisant la dynamique (6.5) et lemme 5.1, on obtient

$$\begin{aligned} du(t, x) &= dv\left(t, \frac{x}{Y_t}\right) \\ &= \left( \beta_v - \frac{x}{Y_t} < \Gamma'_v, \delta_t > + \frac{x}{Y_t} v'(\|\delta_t\|^2 - \alpha_t) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{Y_t} \right)^2 v'' \|\delta_t\|^2 \right) \left( t, \frac{x}{Y_t} \right) dt \\ &\quad + \left( - \frac{x}{Y_t} v' \delta_t + \Gamma_v \right) \left( t, \frac{x}{Y_t} \right) dW_t. \end{aligned}$$

En notant, enfin, par  $\beta_u(t, x)$  le terme en  $dt$  dans cette dynamique et par  $\Gamma_u(t, x)$  celui en  $dW_t$ , les identités (6.12) en découlent.

Comme le processus  $Y$  est par hypothèse continu, nous déduisons par définition que  $u$  est une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale et un  $\mathcal{C}^2$ -processus. Rajoutons à cela l'identité exprimant  $\Gamma_u$  en fonction de  $\Gamma_v$  dans (6.12) et le lemme A.4, il en résulte que  $\Gamma_u \in \mathcal{B}^{1,0}$ . Pour conclure, il suffit d'écrire que

$$u(t, x) - \int_0^t \Gamma_u(s, x) dW_s - u(0, x) = \int_0^t \beta_u(s, x) ds. \quad (6.13)$$

En utilisant le lemme A.3, nous déduisons que les caractéristiques locales de  $u$ ,  $(\beta_u, \Gamma_u)$  satisfont l'hypothèse 5.3.

Enfin, le système d'équations (6.12) est obtenu par une simple application du lemme d'Itô-Ventzel 5.1.  $\square$

En particulier, nous pouvons déduire des théorèmes 6.2 et 6.1 le résultat suivant :

**Théorème 6.3.** *La classe des utilités progressives de la forme 5.19 est stable par changement de numéraire.*

### 6.3. Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS

**Conclusion 6.1.** *Nous concluons que, dans le cas général, si nous connaissons une utilité progressive  $u$  dans un marché donné, nous pouvons toujours déterminer une fonction d'utilité progressive  $v^Y$  dans n'importe quel numéraire  $y$ . Il suffit juste de considérer la transformation suivante :*

$$v^Y(t, \tilde{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} u(t, \tilde{x}Y).$$

*Il est important de noter que, dans ce paragraphe, nous n'avons pas fait l'hypothèse que la volatilité  $\gamma$  du numéraire  $Y$  appartient à l'espace  $\mathcal{K}\sigma$  et ce contrairement à l'exemple 4.3.2. En effet, dans l'exemple 4.3.2, en appliquant le lemme d' Itô, nous avons montré que  $u$  est solution de l'EDP stochastique*

$$du(t, x) = \left( \frac{\|u'\eta_t + \Gamma'_u\|^2}{2u''} - r_t x u' \right) (t, x) dt + \Gamma_u(t, x) dW_t.$$

*où nous rappelons l'identité  $u'\eta + \Gamma'_u = xu''\eta$ . Donc pour que  $u$  soit une utilité progressive et satisfait l'EDP caractéristique de cette classe il fallait que le terme  $u'\eta + \Gamma'_u$  s'écrive sous la forme d'une projection sur le cône  $\mathcal{K}\sigma$  ce qui est équivalent à supposer que  $\eta\sigma^{-1}$  est une stratégie admissible.*

## 6.3 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS

Nous nous plaçons dans cette section dans le nouveau univers d'investissement dans le but d'y établir les EDPS que vérifient les utilités progressives.

### 6.3.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

L'idée est similaire à celle du chapitre précédent. Il s'agit d'établir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman que doit satisfaire une utilité progressive dans le nouveau univers d'investissement décrit au début du paragraphe 6.2. En se basant essentiellement sur l'équivalence entre l'univers de départ et le nouveau, nous déduisons sans faire de calcul, à partir du théorème 5.4.4 un premier résultat qui s'annonce comme suit :

**Théorème 6.4.** *Soit  $v$  un processus d'utilité progressive dans le marché  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$  décrit dans (6.7), vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors,  $v$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$\beta(t, \tilde{x}) + v' \tilde{r}_t \tilde{x} + \sup_{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}_t} \tilde{\mathcal{P}}(t, \tilde{x}, \tilde{\pi}) = 0, \quad (6.14)$$

où  $\tilde{\mathcal{P}}$  est l'opérateur défini par

$$\tilde{\mathcal{P}}(t, x, \tilde{\pi}) = \left[ \langle \tilde{\pi}_t \sigma_t, v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v(t, x) \rangle + \frac{1}{2} v'' \|\tilde{\pi}_t \sigma_t\|^2 \right]. \quad (6.15)$$

Signalons que nous avons noté  $\tilde{x}$  les richesses initiales dans le nouveau numéraire pour rappeler que nous ne sommes pas dans le cadre initial où les richesses sont notées  $x$ .

### 6.3.2 Stratégie optimale

En ce qui concerne la stratégie optimale ainsi que l'EDP stochastique, les résultats sont de nature différente et ne peuvent être déduits par analogie. Ceci est dû essentiellement, comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 6.2, au fait que le nouvel espace de contraintes  $\mathcal{K}$  défini dans le système (6.7) n'est plus un cône convexe, et par conséquent, que certaines propriétés fondamentales de l'opérateur de projection sur un cône convexe fermé ne sont plus satisfaites. C'est pour cette raison que nous détaillerons les calculs dans ce cadre général, le principe étant toujours le même que celui exposé dans les chapitres 2 et 4.

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\sup_{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}_t} \mathcal{P}(t, \tilde{x}, \tilde{\pi})$$

où nous remplaçons les stratégies  $\tilde{\pi}$  par leur définition, à savoir

$$\tilde{\pi} = \frac{\pi}{Y} - x \delta \sigma^{-1}.$$

On obtient

$$\mathcal{P}(t, \tilde{x}, \pi) = \frac{v''}{2} \left( \left\| \frac{\pi_t}{Y_t} \sigma_t - \tilde{x} \delta_t + \frac{v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''}(t, \tilde{x}) \right\|^2 - \left\| \frac{v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right\|^2(t, \tilde{x}) \right).$$

### 6.3. Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS

D'après la stricte concavité de  $v$  (définition 4.3, assertion (i)), il en découle que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, \tilde{x}, \pi) = -\frac{v''}{2} \|v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v(t, \tilde{x})\|^2 \quad (6.16)$$

$$+ \frac{v''}{2(Y_t)^2} \inf_{\pi \in \mathcal{K}} \left\| \frac{-Y_t(-\tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v)}{v''}(t, \tilde{x}) - \pi_t \sigma_t \right\|^2. \quad (6.17)$$

Ainsi, la stratégie optimale n'est autre que la projection du terme

$$\frac{-Y_t(-\tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v)}{v''}(t, \tilde{x})$$

sur le cône  $\mathcal{K}_t \sigma_t$ , et donc est donnée par

$$\pi_t^*(\tilde{x}) = -\frac{Y_t}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( -\tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v \right)(t, \tilde{x}) \quad (6.18)$$

d'où le théorème suivant :

**Théorème 6.5.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 5.4, la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi_t^*(\tilde{x}) = -\frac{Y_t}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( -\tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v \right)(t, \tilde{x}) \quad (6.19)$$

ou encore, exprimée en fonction de la stratégie optimale dans le nouvel univers d'investissement

$$\tilde{\pi}_t^*(\tilde{x}) = -\frac{1}{v''} \left( \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (-\tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v) + \tilde{x}v''\delta_t \right)(t, \tilde{x}). \quad (6.20)$$

La présence dans ces équations du processus  $Y$  et de son paramètre de diffusion  $\delta$  dans le terme en  $xu''$  ainsi que dans la formule établie de la nouvelle prime de marché  $\tilde{\eta}$  met en évidence l'impact du changement de numéraire sur les stratégies optimales dans le nouveau marché financier  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$ .

Par contre, nous rappelons que ce numéraire ne doit en aucun cas affecter les stratégies optimales dans le marché de départ  $\mathcal{M}^{r, \eta}$ . Or, remarquons que dans l'équation (6.19), le paramètre  $\delta$  est présent, bien qu'il s'agisse de la stratégie optimale dans le marché de départ. Ceci n'est pas, en effet, en contradiction avec ce que nous venons de dire. Il faut juste se rappeler que  $\Gamma_v$  est la volatilité d'une utilité progressive  $v$  dans le nouvel univers. Par conséquent, d'après le théorème

6.2 (équation (6.12)), l'utilité correspondante  $u$  définie dans le marché initial par

$$u(t, x) = v(t, \frac{x}{Y_t})$$

est telle que sa volatilité  $\Gamma_u$  soit donnée par

$$\Gamma_u(t, x) = \left( -\frac{x}{Y_t} v' \delta_t + \Gamma_v \right) (t, \frac{x}{Y_t}).$$

En dérivant cette quantité et en faisant le changement de variable  $x = \tilde{x}Y_t$ , nous obtenons, puisque  $\tilde{\eta} = \eta - \delta$ , l'identité suivante

$$Y_t \left( -\tilde{x} v'' \delta_t + v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v \right) (t, \tilde{x}) = (u' \eta_t \Gamma'_u) (t, x).$$

Injection cette identité dans (6.19), on a alors

$$\pi_t^*(x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \left( u' \eta_t + \Gamma'_u \right) (t, x).$$

Ceci n'est autre que l'équation (6.19) établie dans le théorème 5.5 dans le cadre du marché de départ  $\mathcal{M}^{r, \eta}$ . D'ailleurs, ce théorème pourrait être démontré en partant de cette identité et en remontant les calculs dans l'autre sens.

**Remarque 6.3.** *Il est important de noter que l'unicité de la stratégie optimale, présentée ci-dessus comme le vecteur meilleure approximation de la distance entre  $u' \eta_t + \Gamma'_u$  et le cône  $\mathcal{K}\sigma$ , n'implique pas l'unicité de la richesse optimale.*

### 6.3.3 EDP stochastiques

D'après les résultats du paragraphe précédent, nous déduisons la condition nécessaire que doit vérifier le drift  $\beta_v$  de toute utilité progressive  $v$  dans le nouvel univers d'investissement que nous avons introduit dans le paragraphe 6.2. Cette condition nécessaire est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 6.6.** *Soit  $v$  un processus d'utilité progressive dans l'univers  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$  de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors, elle est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$\begin{aligned} & \beta_v(t, \tilde{x}) + \tilde{x} v' \tilde{r}_t \\ & + \frac{1}{2v''} \left( \left\| \left( I_d - \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \right) (v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v - \tilde{x} v'' \delta_t) \right\|^2 - \|v' \tilde{\eta}_t + \Gamma_v\|^2 \right) (t, \tilde{x}) = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

où nous avons noté par  $I_d$  l'identité de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

### 6.3. Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème il suffit d'injecter l'identité (6.18) dans l'équation (6.16), le résultat est alors immédiat.  $\square$

**Remarque 6.4.** *Le terme  $(I - \prod_{\mathcal{K}\sigma})$  n'est autre que l'opérateur de projection sur le cône dual  $(\mathcal{K}\sigma)^*$  (voir la définition B.14). Nous préférons cette notation à celle de  $\prod_{(\mathcal{K}\sigma)^*}$  pour mettre en évidence le fait que nous projetons sur le dual et pour marquer le lien entre les deux projecteurs.*

**Corollaire 6.1.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, et si  $v$  est une utilité progressive dans l'univers  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$ , elle est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$dv(t, \tilde{x}) = \Gamma_v(t, \tilde{x})dW_t \tag{6.22}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2v''} \left( \|v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\|^2 - \left\| \left( I_d - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \right) (v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v - \tilde{x}v''\delta_t) \right\|^2 \right) - \tilde{x}v'\tilde{r}_t \right\} (t, \tilde{x})dt.$$

Dans ces deux derniers résultats, nous remarquons que les EDP stochastiques sont plus compliquées que celles associées à l'univers de départ, à savoir (5.34), (5.35) et (5.37). Ceci est naturel pour la simple raison que les résultats que nous venons d'établir dans ce chapitre ne sont qu'une généralisation de toutes les équations établies dans le chapitre précédent. En effet, il faut juste remplacer  $\delta$  et  $\alpha$  par zéro pour retrouver les théorèmes et les corollaires du chapitre 4.

Cependant, il est important de signaler que la forme du drift dans les équations (6.21) et (6.22) est différente de celle du drift dans (5.37) qui s'écrit tout simplement sous la forme

$$\frac{1}{2u''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'(t, x)] \right\|^2 - u'r_t x. \tag{6.23}$$

Cela est dû uniquement au fait que

$$\left\| \left( I_d - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \right) (a - \tilde{x}v''\delta_t) \right\|^2 - \|a\|^2 \neq \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (a) \right\|^2, \tag{6.24}$$

contrairement au cadre du chapitre précédent où  $\delta \equiv 0$ .



### 6.3.4 Équations de HJB par rapport au nouvel espace de contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$

Jusque-là, nous avons choisi de représenter les équations de HJB ainsi que les EDP stochastiques dans ce nouvel univers par rapport à l'opérateur de projection sur le cône convexe fermé  $\mathcal{K}\sigma$ . Nous avons vu aussi que les équations obtenues deviennent plus compliquées. Cependant, nous pouvons simplifier ces résultats uniquement en remarquant que, bien que  $\tilde{\mathcal{K}}$  ne soit pas un cône, il est convexe et fermé, et donc vérifie le lemme suivant :

**Lemme 6.1.** *Pour tout point  $a$  de  $\mathbb{R}^d$ , il existe un unique vecteur de meilleure approximation dans  $\tilde{\mathcal{K}}\sigma$  noté  $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)$  tel que*

$$\|a - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)\| = \inf_{b \in \tilde{\mathcal{K}}} \|a - b\|. \quad (6.25)$$

De plus ce point vérifie

$$\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a) = \prod_{\mathcal{K}\sigma}(a - x\delta\sigma^{-1}) + x\delta\sigma^{-1}. \quad (6.26)$$

Pour la preuve de ce lemme, voir B.7 et B.8. Ceci nous permet alors de réécrire le théorème 6.6 ainsi que le corollaire 6.1 dans le nouveau espace de contraintes comme suit :

**Théorème 6.7.** *Soit  $v$  un processus d'utilité progressive dans l'univers  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$  de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors,*

(i)  *$v$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$\begin{aligned} dv(t, \tilde{x}) &= \Gamma_v(t, \tilde{x})dW_t \\ &+ \left( \frac{v''}{2} \left[ \left\| \frac{v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right\|^2 - \left\| \left( I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t\sigma_t} \right) \left( - \frac{v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right) \right\|^2 \right] - \tilde{x}v'\tilde{r}_t \right)(t, \tilde{x}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

(ii) *La stratégie optimale notée par  $\tilde{\pi}^*$  est unique et elle est donnée par*

$$\tilde{\pi}_t^*(\tilde{x})\sigma_t = \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t\sigma_t} \left( - \frac{v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right)(t, \tilde{x}). \quad (6.28)$$

Dans cette nouvelle représentation, l'hypothèse 5.2 devient :

**Hypothèse 6.2.**

$$\begin{cases} \left( \frac{v''}{2} \left[ \left\| \frac{v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right\|^2 - \left\| (I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t \sigma_t}) \left( - \frac{v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''} \right) \right\|^2 \right] - \tilde{x} v' \tilde{r}_t \right) \in \mathcal{B}^{1,0} \\ \Gamma_v \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Rappelons que, comme  $\tilde{\mathcal{K}}$  n'est pas un cône convexe, l'opérateur de meilleure approximation  $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}$  ne vérifie pas certaines propriétés de la projection orthogonale, notamment

$$\langle (I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma})(a), \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a) \rangle \neq 0. \quad (6.30)$$

En particulier,

$$\|a\|^2 - \|(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma})(a)\|^2 \neq \|\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)\|^2,$$

ce qui implique une différence par rapport aux résultats des théorèmes 5.2 et 5.6. Par contre, il existe des cas non triviaux et assez importants pour lesquels nous retrouvons des représentations identiques à celles de ces deux derniers théorèmes 5.2 et 5.6 .

À ce stade, nous venons d'étudier de manière générale la question du changement de numéraire appliqué à des utilités progressives . Nous avons vu par conséquent que l'ensemble des contraintes  $\tilde{\mathcal{K}}$  joue un rôle important au niveau du drift de ces utilités. Donc, comme le but dans la suite est de simplifier les équations établies, nous commençons par étudier sous quelles conditions le projecteur de meilleure approximation  $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}$  satisfait

$$\|a\|^2 - \|(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma})(a)\|^2 \neq \|\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)\|^2, \forall a \in \mathbb{R}^d.$$

Voici un exemple important :

**Exemple : le cas où  $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$  :**

Nous supposons dans ce cas particulier que la volatilité  $\delta$  du numéraire  $Y$  est telle que  $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ .

Sous cette hypothèse, il est facile de vérifier que le nouvel ensemble de contraintes

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{\mathcal{K}}{Y} - x\delta\sigma^{-1}$$

est stable par multiplication positive et par addition et est donc un cône convexe fermé. De plus, ce cône n'est autre que l'ensemble des contraintes de départ, c-à-d  $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ . Dans ce cas, nous avons l'identité suivante en terme de projecteur de meilleure approximation :

$$\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma} \equiv \prod_{\mathcal{K}\sigma}$$

ce qui implique que les résultats des paragraphes précédents deviennent simplement :

**Théorème 6.8.** *Soit  $v$  un processus d'utilité progressive dans l'univers  $\mathcal{M}^{\tilde{r}, \tilde{\eta}, Y}$  de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors,*

(i)  *$v$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$dv(t, \tilde{x}) = \left( \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v) \right\|^2 - \tilde{x}v'\tilde{r}_t \right)(t, \tilde{x}) + \Gamma_v(t, \tilde{x})dW_t. \quad (6.31)$$

(ii) *La stratégie optimale notée par  $\tilde{\pi}^*$  est unique et elle est donnée par*

$$\tilde{\pi}_t^*(\tilde{x})\sigma_t = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} (v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v)(t, \tilde{x}). \quad (6.32)$$

Ces équations sont alors identiques à celles du théorème 5.6 et au corollaire 5.2 établies dans l'univers d'investissement initial, à la seule différence que  $(\tilde{r}, \tilde{\eta})$  remplace  $(r, \eta)$ . Par contre, l'ensemble des contraintes est le même, c-à-d  $\mathcal{K}$ . Ceci est dû au fait que le numéraire affecte le taux court et la prime de marché mais pas l'ensemble des contraintes.

## 6.4 Utilités progressives et Portefeuilles Martingales

D'après les résultats du théorème 6.2, nous avons montré qu'à partir d'une utilité progressive définie sur un marché donné, il est possible de construire,

dans tout nouveau marché, un nouveau processus d'utilité progressive par la simple transformation décrite dans ce théorème. Nous avons vu aussi dans le théorème 6.8 qu'un bon choix du numéraire et particulièrement de sa volatilité nous permet de simplifier de manière considérable les EDP stochastiques que vérifie une utilité progressive dans un nouvel univers défini par  $Y$ .

Notre but est alors de simplifier encore plus les équations aux dérivées partielles que doit satisfaire une utilité progressive, mieux comprendre l'impact de la volatilité  $\Gamma$  de l'utilité sur le choix de la stratégie optimale et d'étudier l'équation aux dérivées partielles stochastique que satisfait une utilité progressive dans un univers d'investissement de la forme 5.2. La question qui se pose est alors la suivante : existe-t-il un numéraire particulier dans lequel les EDPS sont beaucoup plus simples ?

Pour répondre à cette question, nous allons distinguer deux cas :

- Le cas où  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$
- Le cas où  $\mathcal{K}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ .

#### 6.4.1 Le cas où $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$

Pour commencer, nous nous intéressons dans ce paragraphe uniquement aux numéraires  $Y$  tels que leurs volatilités, notées dans les sections précédentes par  $\delta$ , vérifient  $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ .

Ceci nous permet de nous placer en particulier dans le contexte du théorème 6.8, où nous avons montré qu'un processus d'utilité progressive dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta,Y}$  est solution de l'EDP stochastique suivante

$$dv(t, x) = \left( \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v] \right\|^2 - xv' \tilde{r}_t \right) (t, x) dt + \Gamma_v(t, x) dW_t. \quad (6.33)$$

où nous rappelons que  $\tilde{\eta} = \eta - \delta$  et que  $\tilde{r} = r - \alpha - \langle \eta, \delta \rangle$  ( $\delta$  et  $\alpha$  sont les paramètres de diffusion de  $Y$ , voir 6.5). Le but par la suite est de simplifier le plus possible cette dynamique, l'idéal serait de pouvoir annuler les termes  $\tilde{r}$  et  $\tilde{\eta}$ . Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.3.**  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$

**Remarque 6.5.** *Il est important de noter que cette hypothèse est introduite uniquement pour simplifier la compréhension du rôle joué par la volatilité de*

*l'utilité progressive et pour alléger les calculs. Nous noterons que toutes les idées qui seront développées dans la suite peuvent être appliquées sans cette hypothèse en particulier la technique introduite au dernier chapitre de ce manuscrit. Nous reviendrons à cette remarque dans la dernière section du chapitre 8 où nous allons relaxer cette hypothèse.*

Sous cette hypothèse, si nous choisissons  $\delta = \eta$ , alors  $\tilde{\eta} = 0$ . Si de plus le drift  $\alpha$  est choisi tel que  $\alpha = r + \|\eta\|^2$ , nous concluons que si  $\delta = \eta$ ,  $\alpha = r + \|\eta\|^2$ , donc (6.33) est équivalente à

$$dv(t, x) = \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\kappa_t \sigma_t} \Gamma'_v \right\|^2(t, x) dt + \Gamma_v(t, x) dW_t. \quad (6.34)$$

Dans ce cas, il est simple de remarquer que

$$\frac{dY_t}{Y_t} = (r_t + \|\eta_t\|^2) dt + \eta_t dW_t. \quad (6.35)$$

Ceci est encore équivalent à

$$\frac{d\left(\frac{1}{Y_t}\right)}{\left(\frac{1}{Y_t}\right)} = -r_t dt - \eta_t dW_t, \quad (6.36)$$

qui n'est autre que le processus  $H^{r,\eta}$ , le numéraire du marché.

Nous remarquons que, dans ce numéraire très particulier qui est le numéraire du marché, les richesses définies par  $\tilde{X}_t = H_t^{r,\eta} X_t$  sont des martingales sous la probabilité risque-neutre, et donc il n'y a pas de prime de risque. Ceci nous amène, en notant par  $v$  le processus d'utilité progressive dans ce numéraire, au résultat suivant, conséquence immédiate de la proposition 4 :

**Proposition 6.1.** *Si  $v$  est un processus d'utilité progressive de la forme de (5.19) vérifiant l'hypothèse 5.2 dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta,(H^{r,\eta})^{-1}}(\tilde{\mathcal{K}})$  issu de  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  par le changement de numéraire  $(H^{r,\eta})^{-1}$ , alors  $v$  est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$\beta(t, x) + \mathbf{H}(t, x, \Gamma', v'') = 0 \quad (6.37)$$

où on a

$$\mathbf{H}(t, x, \Gamma', v'') = -\frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\kappa_t \sigma_t} \Gamma' \right\|^2(t, x) \quad (6.38)$$

et la stratégie optimale est donnée par :

$$\pi^*(t, x) \cdot \sigma_t = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma'(t, x). \quad (6.39)$$

A partir de ce résultat, il est facile de déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 6.2.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, si  $v$  est un processus d'utilité progressive dans le marché  $\mathcal{M}^{r, \eta, (H^{r, \eta})^{-1}}(\mathcal{K})$  de numéraire  $(H^{r, \eta})^{-1}$ , alors  $v$  est une surmartingale obéit à la dynamique*

$$dv(t, x) = \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma'(t, x) \right\|^2 dt + \Gamma(t, x) dW_t. \quad (6.40)$$

Remarquons que dans l'une ou l'autre des deux équations (6.37) et (6.39), seule la volatilité  $\Gamma$  intervient. Ceci exprime mieux et de manière plus naturelle le rôle de la volatilité  $\Gamma$  de l'utilité stochastique. En effet, d'après la dynamique (6.40), il existe une certaine équivalence entre l'utilité progressive et sa volatilité. De plus, d'après l'équation (6.39), il est évident que la dérivée de la volatilité de l'utilité  $\Gamma'$  joue le rôle de la direction optimale d'investissement (le rôle joué classiquement par  $\eta$ ).

Dans le cadre *classique* d'optimisation de portefeuille, nous savons bien démontrer que, si les richesses sont des martingales, la stratégie optimale est la stratégie "rien faire" ( $\pi^* = 0$ ), alors que dans ce cadre progressif, la stratégie optimale ne consiste plus à tout placer en *cash* jusqu'à maturité, mais elle devient proportionnelle à  $\Gamma'$  (équation (6.39)) : paramètre de stochasticité de  $u$ .

Par la suite, il est très important de noter que le fait de se placer dans un marché où la dynamique des richesses est donnée par :

$$dX_t^{s, x, \pi} = r_t X_t^{\tilde{\pi}} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \quad (6.41)$$

et où les utilités progressives sont telles que :

$$\beta_u(t, x) + u'(t, x) \tilde{r}_t x - \frac{1}{2u''(t, x)} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} [\eta_t u' + \Gamma'_u] \right\|^2(t, x) = 0, \quad (6.42)$$

implique que, d'après le théorème 6.2, le problème initial est équivalent au problème où les richesses  $\tilde{X}^{x, \pi} = X^{x, \pi} H^{r, \eta}$  sont des martingales, c-à-d que les richesses sont telles que :

$$d\tilde{X}_t^{\tilde{\pi}} = (\tilde{\pi}_t^* \sigma_t - \tilde{X}_t^{\pi} \eta_t) dW_t \quad (6.43)$$

et où les utilités sont solutions de

$$\beta_v(t, x) - \frac{1}{2v''} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Gamma'_v \right\|^2(t, x) = 0. \quad (6.44)$$

Ceci s'interprète, simplement, par le fait que le rôle joué par le numéraire (c-à-d le drift  $r$  et la prime de risque) est complètement intégré dans l'utilité stochastique (c-à-d dans  $\Gamma_v$  et  $\beta_v$ ), comme nous pouvons le voir facilement dans le système d'équations (6.12) en remplaçant  $Y$  par  $(H^{r,\eta})^{-1}$ .

C'est donc une nouvelle vision des problèmes d'optimisation de portefeuille où le drift et la prime de risque ne sont plus propres au marché financier en question mais aux utilités stochastiques qui peuvent contenir de l'information, générer du risque et du rendement.

À partir de cette nouvelle vision des marchés financiers, nous concluons qu'il est largement suffisant de se placer sous le numéraire  $H^{-1}$  (sans perte de généralité), autrement dit de considérer que les richesses sont martingales, à la seule condition de modifier ces utilités et d'accepter qu'elles soient stochastiques.

Les équations établies sont alors beaucoup plus simples dans ce marché martingale. Par contre, elles restent toujours très difficiles à étudier et à en déduire une caractérisation générale de ces processus d'utilités progressives. Dans le but de faire une étude complète de ces processus, nous allons dans le chapitre qui suit nous intéresser au dual convexe de ces utilités progressives.

#### 6.4.2 Le cas où $\mathcal{K}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^d$

Dans ce paragraphe, nous ne faisons pas l'hypothèse 6.3, nous supposons uniquement que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$  par exemple :  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^{d-p} \times \{0\}^p$ . L'intérêt de considérer ce cadre est que l'opérateur de projection n'est autre que l'opérateur de projection orthogonale dont les principales propriétés sont la linéarité et le fait que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$  et  $b \in \mathcal{K}$ , on a  $\langle a - \prod_{\mathcal{K}} a, b \rangle = 0$ . Par ailleurs, nous remarquons que dans l'univers d'investissement de départ où les richesses obéissent à la dynamique (5.4), on a

$$dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt). \quad (6.45)$$

Comme  $\mathcal{K}$  est un sous-espace vectoriel, alors

$$\langle \pi\sigma, \eta \rangle = \langle \pi\sigma, \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \rangle$$

ce qui implique que cette dernière dynamique devient

$$dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \eta_t dt). \quad (6.46)$$

Dans ce contexte, nous pouvons remplacer  $\eta$  par sa projection  $\prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta$  dans tous les résultats du paragraphe 6.3. De plus, il est aussi important de noter dans ce cadre que

$$\prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \in \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}).$$

Donc, si nous choisissons

$$\delta = - \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \quad \text{et} \quad \alpha = r + \left\| \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \right\|^2,$$

ce qui implique que  $Y^{-1} = H^r \cdot \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta$ , nous retrouvons tous les résultats du paragraphe précédent, c-à-d la proposition 6.1, où nous rappelons que les processus  $H^{\alpha,\delta}$  sont les processus définis dans (6.47) par

$$\begin{cases} H_t^{\alpha,\delta} = e^{-\int_0^t (\alpha_s + \frac{1}{2} \|\delta_s\|^2) ds - \int_0^t \delta_s dW_s} \\ H_{s,t}^{\alpha,\delta} = \frac{H_t^{\alpha,\delta}}{H_s^{\alpha,\delta}}. \end{cases} \quad (6.47)$$





# Chapitre 7

## Utilités progressives : Dualité

### Sommaire

---

7.1	Introduction . . . . .	200
7.2	Dual convexe : définition et hypothèses . . . . .	201
7.3	Quelques propriétés des utilités progressives . . . . .	204
7.3.1	Retour sur le marché de départ décrit dans 5.2 . . . . .	211
7.4	Dual convexe et EDP stochastiques . . . . .	212
7.5	Dual progressif . . . . .	219
7.6	Dual d'une utilité progressive vs dual progressif . . . . .	221
7.7	Utilités décroissantes . . . . .	224
7.7.1	Utilités décroissantes : résultats existants . . . . .	224
7.7.2	Utilités décroissantes et changement de numéraire . . . . .	226
7.7.3	Une famille de problèmes d'optimisation auxiliaires . . . . .	228

---

*Résumé : Comme dans le chapitre 3, dans ce chapitre nous nous intéressons au processus dual convexe d'une utilité progressive de la forme (5.19). Pour simplifier, nous nous placerons dans le cadre du marché martingale décrit dans le paragraphe 6.4, mais nous donnons en plus les équivalents des principaux résultats dans le marché initial. Notre approche sera similaire à celle du chapitre précédent dans le sens où nous portons notre intérêt essentiellement à établir explicitement la dynamique du processus dual en fonction de celle de l'utilité.*

Dans une première section, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité puis la dynamique de la transformée de Fenchel d'une utilité progressive. Nous montrons que cette dynamique est très similaire à celle de l'utilité progressive (6.40). Encore une fois la volatilité  $\Gamma$  joue un rôle très important dans la dynamique duale et fixe la mesure martingale locale optimale. Nous montrons, aussi, l'équivalent du théorème 3.6 établi dans [60] : c-à-d. que le dual convexe est, à son tour, solution d'un problème d'optimisation dual.

Vues les grandes similitudes entre les utilités progressives et leur dual convexe, ainsi que la forte analogie entre les EDP stochastiques respectives, la technique de dualité ne nous permet pas de résoudre ces problèmes d'optimisation progressif. Par contre les techniques de changement de numéraire et de dualité nous permettent de mieux aborder les utilités progressives décroissantes dans le temps (paragraphe 7.7), étudiées par Zariphopoulou et al. [88] et M. Tehranchi et al. [36]. Nous donnons le principal théorème de ces auteurs et par changement de numéraire, nous donnons une interprétation assez importante de leurs résultats.

## 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, comme dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille (voir le chapitre 3), nous nous intéressons à la transformée de Fenchel  $\tilde{u}$  d'une utilité progressive  $u$  et particulièrement au problème d'optimisation dual. Notre but est d'étudier l'EDP stochastique que vérifie  $\tilde{u}$  et de déterminer une caractérisation des processus d'utilités progressives ainsi que des richesses optimales qu'elles génèrent à travers le dual. Pour ce, et afin de pouvoir utiliser les résultats du paragraphe 6.4, nous supposons, tout au long de ce chapitre ainsi que le chapitre suivant, qu'au moins l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

**Hypothèse 7.1.** *L'ensemble  $\mathcal{K}$  des contraintes sur les stratégies admissibles est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ .*

**Hypothèse 7.2.** *La prime de marché  $\eta$  satisfait :  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ .*

Sous l'une ou l'autre de ces hypothèses, nous avons vu qu'il est largement suffisant, d'après les résultats du paragraphe 6.4, de nous placer dans le cadre

particulier du marché de numéraire  $(H^{r,\eta})^{-1}$  défini dans (6.47). Nous avons établi que si dans cet univers,  $u$  est une utilité progressive de classe  $\mathcal{C}^2$  obéissant à une dynamique de la forme (5.19) et vérifiant l'hypothèse 5.2, alors elle est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante :

$$\begin{cases} du(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}(t, x) dt + \Gamma(t, x) dW_t, \\ \Gamma', \mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\mathcal{K}\sigma}(\Gamma'), \\ (\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}, \Gamma) \in \mathcal{B}^{1,0}, \end{cases} \quad (7.1)$$

et générant le portefeuille optimal suivant :

$$dX_t^{s,x,u} = -\frac{\Gamma', \mathcal{K}}{u''}(t, X_t^{s,x,u}) dW_t, \quad X_s^{s,x,u} = x. \quad (7.2)$$

La richesse optimale est indexée par  $u$  pour rappeler qu'elle est associée à cette utilité.

Rappelons enfin que l'hypothèse

$$(\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}, \Gamma) \in \mathcal{B}^{1,0}$$

est une condition nécessaire pour pouvoir appliquer le lemme d'*Itô-Ventzel* (voir le théorème A.11). Si de plus, nous supposons que  $\Gamma'/u'' \in \mathcal{B}_b^{0,1}$ , alors nous montrons, d'après les théorèmes A.13 et A.16, que l'équation différentielle stochastique (7.2) admet une unique solution, cette solution admettant une modification continue.

## 7.2 Dual convexe : définition et hypothèses

Toujours dans le même marché de numéraire  $(H^{r,\eta})^{-1}$ , nous nous intéressons dans ce paragraphe au dual convexe de l'utilité progressive, dont nous rappelons la définition :

**Définition 7.1.** *On appelle dual convexe , ou encore transformée de Fenchel de  $u(t, \cdot)$  (concave croissante) à tout instant  $t \geq s$  la fonction définie par*

$$\tilde{u}(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_x (u(t, x) - xy). \quad (7.3)$$

Sachant que, par une simple dérivation, on montre que le maximum est atteint en  $x_t^* = I(t, y)$ ,  $\tilde{u}$  est alors donnée par

$$\tilde{u}(t, y) = u(t, I(t, y)) - yI(t, y) \quad (7.4)$$

On remarquera ensuite que  $\tilde{u}' = -I = -(u')^{-1}$ .

Le but de cette section est d'établir la dynamique de ce dual  $\tilde{u}$  en fonction des paramètres de celle de l'utilité  $u$ . Pour cela, remarquons que cette dynamique peut être établie par deux manières différentes :

- À partir de (7.4), où nous pouvons obtenir que

$$d\tilde{u}(t, y) = du(t, I(t, y)) - ydI(t, y).$$

- À partir de l'identité

$$\tilde{u}' = -I = -(u')^{-1}$$

qui nous permet en particulier, et sous les bonnes hypothèses, de déterminer la dynamique de  $\tilde{u}'$  et donc, par une intégration, nous permet d'établir celle de  $\tilde{u}$ .

Par contre, l'une où l'autre de ces deux méthodes nécessite de déterminer la dynamique de  $I = (u')^{-1}$  avant de pouvoir poursuivre nos investigations.

Par conséquent, afin de prouver le résultat principal de ce chapitre, nous allons procéder comme suit ; dans un premier temps nous établirons les hypothèses nécessaires pour déduire la dynamique de la dérivée  $u'$  à partir de celle de  $u$ . Puis, en partant du fait que  $du'(t, I(t, y)) = 0$ , nous déduisons celle de  $I$ .

Pour déduire la dynamique de  $u'$ , la méthode la plus naturelle est de dériver formellement, terme à terme, celle de  $u$ . Mais, de manière générale, ceci n'est pas possible, bien que les paramètres de diffusion de la dynamique de  $u$  sont dérivables. En effet, une hypothèse supplémentaire est nécessaire, voir H. Kunita [74]. Cette hypothèse est la suivante :

**Hypothèse 7.3.** *Supposons, en plus de l'hypothèse habituelle*

$$\left( \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}, \Gamma \right) \in \mathcal{B}^{1,0}$$

nécessaire pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\left(\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}, \Gamma\right) \in \mathcal{B}^{1,\delta}.$$

En d'autres termes, l'hypothèse 5.2 est insuffisante. Il faut supposer de plus que les paramètres de diffusion de  $u$  sont  $\delta$ -Hölderiennes, pour un certain réel  $\delta > 0$ . Alors, dans ce cadre, et d'après le théorème A.12 (ii), nous avons le résultat suivant :

**Proposition 7.1.** *La dérivée  $u'$  de l'utilité progressive (7.1) est un  $\mathcal{C}^1$ -processus et une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale qui obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''} \right) (t, x) dt + \Gamma'(t, x) dW_t. \quad (7.5)$$

En particulier, ses caractéristiques locales  $(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}), \Gamma')$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{0,\delta}$ .

Remarquons, d'après la deuxième partie de cette proposition, que  $u'$  ne satisfait pas l'hypothèse 5.2, nécessaire pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel. Or, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, nous avons besoin de composer  $u'$  au moins avec son inverse pour pouvoir établir la dynamique de  $\tilde{u}$ . C'est pour cette raison que nous remplaçons l'hypothèse 7.3 par :

**Hypothèse 7.4.** *Supposons que  $u$  est un  $\mathcal{C}^3$ -processus et une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale telle que ses caractéristiques locales  $(\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}, \Gamma)$  appartiennent à la classe  $\mathcal{B}^{2,\delta}$  pour un certain  $\delta > 0$ .*

Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 7.2.** *Si  $u$  est une utilité progressive vérifiant l'hypothèse 7.4, alors sa dérivée  $u'$  est une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale et un  $\mathcal{C}^2$  processus qui obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''} \right) (t, x) dt + \Gamma'(t, x) dW_t. \quad (7.6)$$

En particulier, ses caractéristiques locales  $(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''}), \Gamma')$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{1,\delta}$ .

Avant d'énoncer le résultat principal (théorème 7.3) de ce chapitre, nous allons établir quelques propriétés caractéristiques des utilités progressives qui nous permettront de simplifier de manière très significative la preuve du résultat principal (7.3) de ce chapitre.

### 7.3 Quelques propriétés des utilités progressives

Dans ce paragraphe, nous déduisons à partir de la définition 4.3 des utilités progressives, quelques propriétés importantes que nous pouvons aussi interpréter comme des conditions nécessaires. Ces propriétés nous seront d'une grande utilité dans le dernier chapitre de cette thèse, elles sont données par le théorème suivant.

**Théorème 7.1.** *Soit  $u$  une utilité progressive. Notons par  $X^{x,*}$  le portefeuille optimal associé, partant d'un capital initial  $x$ . Alors*

- (i) *Le processus  $(X_t^{x,*} u'(t, X_t^{x,*}))_{t \geq 0}$  est une martingale.*
- (ii) *Le processus  $(u'(t, X_t^{x,*}))_{t \geq 0}$  est une martingale locale (positive), dont la volatilité est dans  $\mathcal{K}^*$ .*
- (iii) *Pour toute stratégie admissible  $\pi$  et pour tout second capital initial  $x'$ , le processus  $(X_t^{x',\pi} u'(t, X_t^{x,*}))_{t \geq 0, x > 0}$  est une surmartingale.*

Nous rappelons que  $\mathcal{K}^*$  désigne le cône dual de  $\mathcal{K}$ , voir définition B.14. Cette notion, de cône dual, est très utilisée dans les problèmes d'optimisation de portefeuille. Pour faire le lien avec les travaux de I. Karatzas et al [55],  $-\mathcal{K}^*$  correspond à l'ensemble  $\tilde{\mathcal{K}}$  appelé aussi le cône barrière de  $-\mathcal{K}$  ( voir la définition dans Rockafellar, R. Tyrrell [98] p.114, (1970) ).

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur ce résultat tout au long de notre étude.

*Démonstration.* Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\pi$  une stratégie admissible et  $X^{x',\pi}$  la richesse associée partant d'un second capital  $x'$  en 0. Comme  $\varepsilon > 0$ , la richesse  $\varepsilon X^{x',\pi} + X^{x,*}$  est une richesse admissible partant en 0 du capital  $\varepsilon x' + x$ , par conséquent

et vu la non optimalité de ce processus

$$\mathbb{E}(u(t, \varepsilon X_t^{x', \pi} + X_t^{x, *}) / \mathcal{F}_s) \leq u(s, \varepsilon X_s^{x', \pi} + X_s^{x, *}), \quad \forall t \geq s \geq 0$$

Par optimalité de la richesse  $X^{x, *}$ , nous pouvons déduire, pour tout  $t \geq s \geq 0$ , que

$$\mathbb{E}(u(t, \varepsilon X_t^{x', \pi} + X_t^{x, *}) - u(t, X_t^{x, *}) / \mathcal{F}_s) \leq u(s, \varepsilon X_s^{x', \pi} + X_s^{x, *}) - u(s, X_s^{x, *}), \quad (7.7)$$

Par conséquent, si nous divisons par  $\varepsilon > 0$  de part et d'autre de cette inégalité et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous déduisons par le théorème de convergence monotone et la concavité de  $u$ ,

$$\mathbb{E}(X_t^{x', \pi} u'(t, X_t^{x, *}) / \mathcal{F}_s) \leq X_s^{x', \pi} u'(s, X_s^{x, *}), \quad \forall t \geq s \geq 0$$

ce qui prouve (iii). Montrons maintenant (i). En remplaçons  $X^{x', \pi}$  par  $X^{x, *}$  dans cette dernière inégalité nous obtenons

$$\mathbb{E}(X_t^{x, *} u'(t, X_t^{x, *}) / \mathcal{F}_s) \leq X_s^{x, *} u'(s, X_s^{x, *}).$$

Il suffit alors d'établir les inégalités dans l'autre sens. Pour cela en prenant cette fois-ci,  $\varepsilon < 0$  mais assez petit, la richesse  $(1 + \varepsilon)X^{x, *}$  est encore une richesse admissible<sup>1</sup>. En remplaçant  $X^{x', \pi}$  par  $X^{x, *}$  dans (7.7), et en divisant par  $\varepsilon < 0$ , nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\frac{u(t, (1 + \varepsilon)X_t^{x, *}) - u(t, X_t^{x, *})}{\varepsilon} / \mathcal{F}_s\right) \geq \frac{u(s, (1 + \varepsilon)X_s^{x, *}) - u(s, X_s^{x, *})}{\varepsilon}, \quad \forall t \geq s \geq 0$$

En passant à la limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il en découle

$$\mathbb{E}(X_t^{x, *} u'(t, X_t^{x, *})) \geq X_s^{x, *} u'(s, X_s^{x, *}), \quad \forall t \geq s \geq 0$$

ce qui prouve (i). La preuve de (ii) est une simple conséquence du lemme suivant.

**Lemme 7.1.** *Soit  $\mathcal{Y}$  une semimartingale positive continue, vérifiant*

- $\forall \pi \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{Y}_t X_t^\pi$  est une surmartingale.
- Il existe  $\pi^* \in \mathcal{K}$  :  $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$  est une martingale.

---

<sup>1</sup>atteignable par une stratégie admissible.



Alors  $\mathcal{Y}$  est une martingale locale, dont la volatilité  $\gamma \in \mathcal{K}^*$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{Y}$  obéit à la dynamique

$$d\mathcal{Y}_t = \mu_t dt + \gamma_t \sigma_t dW_t.$$

En appliquant le lemme d'Itô au processus  $\mathcal{Y}X^\pi$ ,  $\pi \in \mathcal{K}$ ,

$$\mathcal{Y}_t X_t^\pi - \mathcal{Y}_s X_s^\pi = \int_s^t (\mu_\alpha X_\alpha^\pi + \langle \gamma_\alpha \sigma_\alpha, \pi_\alpha \sigma_\alpha \rangle) d\alpha + \int_s^t \gamma_\alpha dW_\alpha.$$

Par hypothèse, il existe  $\pi^* \in \mathcal{K}$  :  $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$  est une martingale, ce qui implique en passant à la limite  $t \rightarrow s$

$$x\mu_t = - \langle \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t \rangle$$

et par conséquent,

$$\mathcal{Y}_t X_t^\pi - \mathcal{Y}_s X_s^\pi = \int_s^t \langle \gamma_\alpha \sigma_\alpha, (\pi - \pi^*)_\alpha \sigma_\alpha \rangle d\alpha + \int_s^t \gamma_\alpha dW_\alpha.$$

Comme les processus  $\mathcal{Y}X^\pi$ ,  $\pi \in \mathcal{K}$  sont des surmartingale,

$$\langle \gamma_t \sigma_t, (\pi - \pi^*)_t \sigma_t \rangle \leq 0, \forall t \geq 0$$

en particulier si  $\pi = \varepsilon \pi^*$ ,  $\varepsilon > 0$

$$(\varepsilon - 1) \langle \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t \rangle \leq 0, \forall t \geq 0.$$

Pour conclure, il suffit de prendre  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  puis  $\frac{3}{2}$ , ce qui conduit à  $\mu = - \langle \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t \rangle = 0$ . Par suite, en rappelant que le cône dual  $\mathcal{K}^*$  n'est autre que l'ensemble des  $\nu$ ,  $\langle \nu, \pi \rangle \leq 0$ ,  $\pi \in \mathcal{K}$  (définition B.14), ceci implique en utilisant les hypothèses du lemme que  $\gamma \in \mathcal{K}^*$ .  $\square$

$\square$

**Remarque 7.1.** Dans le travail de M. Tehranchi et al. [36], les auteurs montrent un résultat très similaire au théorème 7.1, sauf qu'à la place de l'assertion (iii), les auteurs montrent que les processus  $(X_t^{x',\pi} u'(t, X_t^{x,*}))_{t \geq 0, x > 0}$  sont des martingales pour des richesses  $X_t^{x',\pi}$  bornées et des martingales locales si on remplace

### 7.3. Quelques propriétés des utilités progressives

$X_t^{x',\pi}$  par un actif quelconque  $\xi^i$ . Ceci est dû essentiellement au fait que les stratégies admissibles, dans [36], sont dans un espace vectoriel et les portefeuilles  $X^\pi$  ne sont pas forcément positifs. Par conséquent, si  $\varepsilon < 0$ , le portefeuille  $\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}$  est admissible. Par le même raisonnement que la preuve ci-dessus les auteurs prouvent l'inégalité inverse de (7.7) ce qui permet de conclure. Ceci n'est pas vrai dans notre cas, il suffit d'appliquer le lemme d'Itô, à la richesse  $\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}$ , ce qui donne d'après les dynamiques (5.4),

$$d(\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}) = r_t(\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*})dt + (\varepsilon\pi_t + \pi^*)\sigma_t(dW_t + \eta_t).$$

Comme l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  est simplement un cône convexe (voir définition B.13 d'un cône), il n'est donc pas stable par multiplication par un réel strictement négatif, donc la stratégie  $\varepsilon\pi_t + \pi^*$  n'est pas forcément dans  $\mathcal{K}$ . Par contre si  $\pi = \pi^*$  et  $\varepsilon \leq -1$ , la stratégie  $(1 + \varepsilon)\pi^*$  est toujours dans  $\mathcal{K}$ , de même si  $\pi = 0$ . Dans le cas où  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel, ceci est toujours vrai sans contraintes sur  $\varepsilon$ , par contre le portefeuille associé n'est pas forcément admissible.

Notons que dans ce résultat aucune hypothèse supplémentaire sur les utilités progressives n'est faite. Par contre si l'hypothèse 7.4 est satisfaite alors nous pouvons établir les dynamiques des processus  $u'(t, X_t^{s,x,u})$  et  $(X_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}))_{t \geq s \geq 0, x}$ . En effet :

**Proposition 7.3.** *Dans le marché martingale  $\mathcal{M}^{r,\eta,H^{-1}}$ , et sous l'hypothèse 7.4, les assertions suivantes sont vraies :*

- i) *La dérivée par rapport à la richesse tout au long de la trajectoire optimale de l'utilité progressive  $u$  est une martingale évoluant selon l'équation suivante*

$$du'(t, X_t^{s,x,u}) = \Gamma'^{\perp}(t, X_t^{s,x,u})dW_t, \quad (7.8)$$

*où par définition*

$$\Gamma'^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma' - \Gamma'^{\mathcal{K}}.$$

- ii) *Le processus  $(X_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}))_{t \geq s \geq 0, x}$  est une martingale dont la dynamiques est donnée par,  $\forall t \geq s, x > 0$ ,*

$$dX_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}) = \left(X_t^{s,x,u}\Gamma'^{\perp} - \frac{u'}{u''}\Gamma'^{\perp}\right)(t, X_t^{s,x,u})dW_t. \quad (7.9)$$

Ce résultat n'est autre qu'une condition nécessaire que doit vérifier la dérivée d'une utilité progressive. Il nous sera d'une grande utilité dans la suite, notamment pour établir le lien entre  $u'(t, X_t^{s,x,u})$  et le processus optimal (mesure martingale minimale) d'un problème d'optimisation dual que nous définirons dans la section 7.5.

*Démonstration.* La preuve est basée essentiellement sur l'application du lemme d'Itô-Ventzel au processus  $u'(t, X_t^{s,x,u})$ ,  $X_t^{s,x,u} u'(t, X_t^{s,x,u})$ ,  $t \geq s$ . En effet, d'après le théorème précédent, nous savons que ces processus sont des martingales. Il suffit donc, d'après la proposition 7.2, d'écrire que

$$du'(t, x) = \frac{1}{2} \frac{2 \langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle u'' - u''' \|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{(u'')^2} (t, x) dt + \Gamma'(t, x) dW_t, \quad (7.10)$$

d'appliquer le lemme d'Itô-Ventzel et de s'intéresser uniquement aux termes en  $dW_t$ . Nous obtenons, en utilisant la dynamique du portefeuille optimal  $X^{s,x,u}$  donnée par (7.2), que

$$\begin{aligned} du'(t, X_t^{s,x,u}) &= \left( \Gamma'(t, X_t^{s,x,u}) + u'' \left( -\frac{\Gamma', \mathcal{K}}{u''} \right) (t, X_t^{s,x,u}) \right) dW_t \\ &= \Gamma'^{\perp}(t, X_t^{s,x,u}) dW_t \end{aligned}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde découle simplement de cette première assertion et de la dynamique (7.2) du portefeuille optimal.  $\square$

**Remarque 7.2.** Notons que nous pouvons démontrer ce résultat directement sans utiliser le théorème 7.1. Pour cela, toujours par la formule d'Itô-Ventzel, la dynamique de  $u'$  (proposition 7.2) et celle de la richesse optimale (7.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} du'(t, X_t^{s,x,u}) &= \frac{1}{2} \frac{2 \langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle u'' - u''' \|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{(u'')^2} (t, X_t^{s,x,u}) dt \\ &\quad + u'' \left( -\frac{\Gamma', \mathcal{K}}{u''} \right) (t, X_t^{s,x,u}) dW_t + \frac{u''' \|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{2 (u'')^2} (t, X_t^{s,x,u}) dt \\ &\quad + \left\langle \Gamma'', -\frac{\Gamma', \mathcal{K}}{u''} \right\rangle (t, X_t^{s,x,u}) dt + \Gamma'(t, X_t^{s,x,u}) dW_t \\ &= \frac{\langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle - \Gamma''}{u''} (t, X_t^{s,x,u}) dt + \Gamma'^{\perp}(t, X_t^{s,x,u}) dW_t. \end{aligned}$$

Finalement, par le lemme B.6, on obtient que

$$\langle \Gamma'^{\mathcal{K}}, (\Gamma'^{\mathcal{K}})' - \Gamma'' \rangle (t, X_t^{s,x,u}) = 0,$$

ce qui montre à la fois que  $u'(t, X_t^{s,x,u})$  est une martingale et satisfait la dynamique voulue. La deuxième assertion est alors triviale.

Une conséquence directe de la proposition 7.3 est le résultat suivant :

**Corollaire 7.1.** *Sous la même hypothèse 7.4 que dans la proposition précédente, dans le marché martingale, si, à tout instant  $t$ ,  $\Gamma'(t, X_t^{s,x,u})$  appartient à l'ensemble des contraintes, alors la dérivée de l'utilité prise au long de la trajectoire optimale est constante*

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s, x), \quad \forall t \geq s \quad p.s. \quad (7.11)$$

En d'autres termes, si la dérivée de la volatilité de l'utilité  $u$  est une stratégie admissible, alors la mesure martingale minimale (optimale) est identique à 1.

Nous reviendrons plus particulièrement sur cette notion de mesure martingale minimale dans la section suivante où nous étudierons le problème dual et nous montrerons que, sous cette hypothèse, le dual  $\tilde{u}$  est une martingale. Nous reviendrons encore une fois sur ce résultat dans le chapitre suivant quand nous étudierons les classes d'équivalences des utilités progressives. En particulier, nous montrerons que le représentant de chaque classe vérifie l'hypothèse de ce corollaire.

**Remarque 7.3.** *Si nous prenons  $s = 0$  dans l'équation (7.11), nous obtenons que*

$$u'(t, X_t^{x,u}) = u'(0, x), \quad \forall t \geq 0 \quad p.s.$$

Ceci ne nous laisse pas indifférent, car il revient à dire que si le flot stochastique  $x \mapsto X^{x,u}$  est inversible, et si nous notons  $\mathcal{Y}(x)$  son inverse, alors, par un changement de variable  $y = \mathcal{Y}(x)$ , il découle que

$$u'(t, x) = u(0, \mathcal{Y}_t(x)), \quad \forall t \geq 0 \quad p.s.$$

Ainsi, nous venons de montrer que le processus d'utilité progressive  $u$  est la composée de sa condition initiale et de l'inverse d'une martingale.

En particulier, ces utilités généralisent celles étudiées dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2. En effet, si nous choisissons  $\mathcal{Y}(t, x) = x/Y_t$  où  $1/Y$  est une martingale (rappelons que  $\mathcal{Y}$  est une martingale), en intégrant par rapport à  $x$  la formule  $u'(t, x) = u(0, \mathcal{Y}_t(x))$ , nous obtenons

$$u(t, x) = Y_t u\left(0, \frac{x}{Y_t}\right).$$

Ainsi, nous obtenons que  $X^\pi/Y_t$  est une martingale locale sous la probabilité  $\mathbb{Q}^Y$  définie par  $d\mathbb{Q}^Y/d\mathbb{P} = Y$ , ce qui n'est autre que la conditions nécessaire établie dans les principaux théorèmes 4.1 et 4.3 ainsi que le corollaire 4.1 dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2.

### Notations :

Pour toute utilité progressive  $u$ , sur le marché martingale, nous noterons  $H^{x,u}$  le processus défini par

$$H_{s,t}^{x,u} = \frac{u'(t, X_t^{s,x,u})}{u'(s, x)} > 0 \text{ p.s.} \quad (7.12)$$

$H^{x,u}$  est appelé *processus de densité de la mesure martingale minimale* car, comme dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille, nous verrons que  $H^{\cdot,u}$  est le processus optimal qui minimise le problème dual. Il évolue suivant la dynamique

$$dH_{s,t}^{x,u} = \frac{\Gamma'^{\perp}(t, X_t^{s,x,u})}{u'(s, x)} dW_t. \quad (7.13)$$

**Remarque 7.4.** Nous notons, en particulier que le processus  $(H_{s,t}^{x,u} X_t^{s,x,u})_{t \geq s}$  est une martingale.

Pour faire le lien avec les résultats des paragraphes suivants, nous allons réécrire cette dynamique, en utilisant l'identité (7.12) et en rappelant que  $I(t, \cdot)$  désigne  $(u')^{-1}(t, \cdot)$ , sous la forme suivante :

$$dH_{s,t}^{x,u} = \frac{\Gamma'^{\perp}(t, I(t, u'(s, x) H_{s,t}^{x,u}))}{u'(s, x)} dW_t. \quad (7.14)$$

$X^{s,x,u}$  est le processus de richesse optimale associée à  $u$  partant à la date  $s$  d'un capital  $x$ . Nous reviendrons sur cette dynamique dans la suite pour la réécrire sous une seconde forme plus au moins liée à un problème d'optimisation dual. Nous notons que  $H^u$  est une martingale, et nous remarquons qu'à tout instant  $t \geq 0$ , l'identité suivante

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s, x) H_{s,t}^{x,u} > 0 \text{ p.s.} \quad (7.15)$$

est satisfaite, contrairement au cadre *classique* d'optimisation de portefeuille où cette égalité n'est en général vraie qu'à la date de maturité  $T$ .

### 7.3.1 Retour sur le marché de départ décrit dans 5.2

Sous l'hypothèse 7.4, l'équivalent du théorème 7.1 et de la proposition 7.3 dans l'univers d'investissement  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  décrit dans 5.2 où la prime de marché est notée par  $\eta$  et le taux court par  $r$ , sont donnés par les résultats suivants.

**Théorème 7.2.** *Soit  $v$  une utilité progressive dans l'univers d'investissement 5.2, notons par  $\tilde{X}^{x,*}$  le portefeuille optimal associé, partant d'un capital initial  $x$ . Alors :*

- (i) *Le processus  $(\tilde{X}_t^{x,*} u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t \geq 0}$  est une martingale.*
- (ii) *Le processus  $(u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t \geq 0}$  est une sous-martingale (positive).*
- (iii) *Pour toute stratégie admissible  $\pi$  et pour tout second capital initial  $x'$ , le processus  $(\tilde{X}_t^{x',\pi} u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t \geq 0, x > 0}$  est une surmartingale.*

*Ici nous avons noté  $\tilde{X}^{x',\pi}, \pi \in \mathcal{K}$  les processus de richesse dans ce marché, partant d'un capital  $x$  et suivant la stratégie  $\pi$ .*

Nous énonçons ce résultat car nous reviendrons dans le chapitre suivant au cadre de ce marché financier où nous avons proposer d'étudier les utilités progressives. Nous notons que ce résultat ne tient compte de l'hypothèse  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$  faite au paragraphe 6.4. En d'autres termes, même si cette hypothèse n'est pas satisfaite, ce résultat est toujours vrai.

*Démonstration.* La preuve de (i) et (iii) est identique à celle de (i) et (iii) du théorème précédent.

La preuve de l'assertion (ii), repose sur le lemme suivant, qui se démontre de manière identique au lemme 7.1.

**Lemme 7.2.** *Soit  $\mathcal{Y}_t$  une semimartingale positive, vérifiant :*

- $\forall \pi \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{Y}_t X_t^\pi$  est une surmartingale.
- Il existe  $\pi^* \in \mathcal{K}$  :  $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$  est une martingale.

*Alors  $\mathcal{Y}$  est une sous-martingale qui obéit à la dynamique*

$$\frac{d\mathcal{Y}_t}{\mathcal{Y}_t} = -r_t dt + (\nu_t \sigma_t - \eta_t) dW_t, \quad \nu_t \in \mathcal{K}_t^*. \quad (7.16)$$

□

**Proposition 7.4.** *Dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ , la dérivée de l'utilité progressive prise au long de la trajectoire optimale obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t, X_t^{s,x,u}) = -r_t u'(t, X_t^{s,x,u}) dt - (u' \eta_t - \Gamma'^{\perp})(t, X_t^{s,x,u}) dW_t. \quad (7.17)$$

*En particulier, elle s'écrit sous la forme*

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s, x) H_{s,t}^{r,\eta + \frac{\Gamma', \perp}{u''}}. \quad (7.18)$$

*En particulier, si  $\Gamma'$  est une stratégie admissible, c-à-d.  $\Gamma'^{\perp} \equiv 0$ ,*

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s, x) H_{s,t}^{r,\eta}, \quad \forall t \geq s \quad p.s. \quad (7.19)$$

*où nous rappelons que les processus  $H^{\alpha,\beta}$  sont définies par*

$$H_{s,t}^{\alpha,\beta} = e^{-\int_s^t (\alpha_u + \frac{1}{2} \|\beta_u\|^2) du - \int_s^t \beta_u dW_u}, \quad t \geq s \geq 0. \quad (7.20)$$

## 7.4 Dual convexe et EDP stochastiques

Le but de cette section est alors d'établir la dynamique du dual convexe d'une utilité progressive et par conséquent de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 7.3.** *La transformée de Fenchel  $\tilde{u}$  du processus d'utilité progressive  $u$  vérifiant l'hypothèse 7.4 dans le marché de numéraire  $H^{-1}$  est une sous-martingale obéissant à la dynamique*

$$d\tilde{u}(t, y) = \frac{1}{2\tilde{u}''} \|\tilde{\Gamma}'^{\perp}\|^2(t, y) dt + \tilde{\Gamma}(t, y) dW_t \quad (7.21)$$

$$\text{où} \quad \tilde{\Gamma}(t, y) = \Gamma(t, -\tilde{u}')(t, y). \quad (7.22)$$

Sa dérivée est solution de

$$d\tilde{u}'(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\|\tilde{\Gamma}'^{\perp}\|^2}{\tilde{u}''} \right](t, y) dt + \tilde{\Gamma}'(t, y) dW_t.$$

Dans la proposition 6.1 et le corollaire 6.2, nous avons montré qu'une utilité progressive  $u$  dans ce marché martingale est une surmartingale. D'après ce dernier résultat et vu que le drift  $\tilde{u}'' > 0$  dans (7.33) est alors positif, ceci induit que dual convexe  $\tilde{u}$  de  $u$  est une sous-martingale.

La dynamique du processus dual  $\tilde{u}$  est très similaire à celle de  $u$  (équation (7.1)). La seule différence consiste au fait que dans le drift de  $\tilde{u}$  est  $\tilde{\Gamma}'^{\perp}$ , terme qui remplace  $\Gamma'^{\mathcal{K}}$  dans (7.1), et que  $\tilde{\Gamma}$  remplace  $\Gamma$  en terme de volatilité. Nous remarquons aussi que la volatilité  $\tilde{\Gamma}$  n'est qu'une transformation de la volatilité de l'utilité  $\Gamma$ . En effet, on a

$$\tilde{\Gamma}(t, \cdot) = \Gamma\left(t, (u')^{-1}(t, \cdot)\right).$$

Le paramètre  $\Gamma$  de la dynamique de l'utilité *progressive*, non seulement détermine la dynamique de  $u$  ainsi que celle de la richesse optimale, mais aussi celle du dual convexe  $\tilde{u}$ . Nous montrerons aussi dans la suite que  $\Gamma$  intervient de manière analogue et déterminera la dynamique de la *mesure martingale minimale*. En d'autres termes,  $\Gamma$  intervient à tous les niveaux : utilité, dual convexe, richesse optimale et mesure martingale, ceci de manière décisive au point de devenir *la clé* de toute cette étude.

**Remarque 7.5.** Soit  $\mathcal{Y}_u$  le processus défini par

$$\mathcal{Y}_u(t, x) = u'(0, x) H_{0,t}^{x,u}. \quad (7.23)$$

En utilisant la définition de  $\tilde{\Gamma}$  (7.35) ainsi que la dynamique du processus  $H^{x,u}$  donnée par l'équation (7.14), on obtient que le processus  $\mathcal{Y}_u$  obéit à la dynamique suivante

$$d(\mathcal{Y}_u(t, x)) = -\frac{\tilde{\Gamma}'^{\perp}}{\tilde{u}''}(t, \mathcal{Y}_u(t, x)) dW_t \quad (7.24)$$

ce qui est semblable à la dynamique du portefeuille optimal  $X^{x,u}$  dans ce marché où nous remplaçons  $\tilde{\Gamma}'^{\perp}$  par  $\Gamma'^{\mathcal{K}}$  et  $\tilde{u}''$  par  $u''$ .



De plus, d'après ce résultat et en utilisant la grande analogie entre la dynamique de  $u$  et celle de  $\tilde{u}$ , nous pouvons déduire que, comme dans le problème primal, le processus  $\tilde{u}(t, u'(s, x)H_{s,t}^{x,u})$  est une martingale.

Par contre, la question que nous nous poserons dans la suite est la suivante :  $\tilde{u}$  est-il défini à partir d'un certain problème d'optimisation comme c'est le cas pour l'utilité  $u$  ? Si oui, le processus  $u'(s, x)H_{s,t}^{x,u}$  est-il l'optimum dans ce problème ?

La réponse à cette question est positive et sera détaillée dans le paragraphe 7.5.

Pour faire le lien avec le marché de départ  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ , nous montrons le résultat analogue suivant :

**Théorème 7.4.** *La transformée de Fenchel  $\tilde{u}$  du processus d'utilité progressive  $u$  dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  vérifiant l'hypothèse 7.4 obéit à la dynamique suivante*

$$d\tilde{u}(t, y) = \left[ \frac{1}{2\tilde{u}''} (\|\tilde{\Gamma}'\|^2 - \|\tilde{\Gamma}', \mathcal{K} - y\eta\|^2) + y\tilde{u}'r_t \right] (t, y)dt + \tilde{\Gamma}(t, y)dW_t \quad (7.25)$$

$$\tilde{\Gamma}(t, y) = \Gamma(t, -\tilde{u}')(t, y).$$

La première chose que nous pouvons remarquer dans ce résultat, comparé avec celui qui précède, est que la dynamique est beaucoup plus compliquée et loin d'être intuitive.

En plus,  $\tilde{u}$  n'est pas forcément une sous-martingale tel qu'il est le cas dans la cadre du marché martingale. En effet, le signe du terme

$$(\|\tilde{\Gamma}'\|^2 - \|\tilde{\Gamma}', \mathcal{K} - y\eta\|^2 + y\tilde{u}'r)$$

n'est pas constant . Il peut être positif ou négatif selon le choix du paramètre  $\tilde{\Gamma}'$ , contrairement au cadre du théorème précédent. D'où, encore une fois, l'intérêt de nous placer sur le marché martingale où les équations sont à la fois plus simples et admettent une interprétation plus naturelle.

Cependant, ceci ne nous empêche pas de faire la même remarque sur le rôle joué par la volatilité  $\Gamma$ .

La preuve du théorème 7.4 peut être déduite de celle de 7.3. Nous commençons par démontrer le résultat dans le marché martingale  $\mathcal{M}^{r,\eta,(H^{r,\eta})^{-1}}$ . Ensuite,

nous déduisons celle dans le marché  $\mathcal{M}^{r,\eta}$  en remarquant que, dans ce nouveau marché,  $\tilde{u}$  est donnée par

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{v}(t, yH_t^{r,\eta})$$

où  $\tilde{v}$  est le dual convexe d'une utilité progressive  $v$  définie sur le marché martingale.

Voici la preuve du Théorème 7.3.

*Démonstration.* (Théorème 7.3) L'idée de la preuve de ce théorème est, simplement, basée sur la définition même du dual convexe. En effet, par construction, nous savons que

$$\tilde{u}(t, y) = u(t, I(t, y)) - yI(t, y). \quad (7.26)$$

En dérivant par rapport à  $y$ , on a

$$\tilde{u}_y(t, y) = -I(t, y). \quad (7.27)$$

Le but alors est d'établir dans un premier temps la dynamique de  $I$ , et ensuite, celle de  $\tilde{u}$  en intégrant cette dernière par rapport à  $y$ .

Pour cela, nous commençons par rappeler les identités suivantes, dont nous aurons besoin tout au long de cette démonstration.

$$(I) \begin{cases} u'(t, I(t, y)) = y \\ u''(t, I(t, y)) = \frac{1}{I'(t, y)} \\ -\frac{u'''}{u''^2}(t, I(t, y)) = \frac{I''}{I'}(t, y) \text{ où encore } -u'''(t, I(t, y)) = \frac{I''}{(I')^3}(t, y). \end{cases}$$

Rappelons ensuite que, comme  $u$  satisfait l'hypothèse 7.4, d'après la proposition 7.2 ainsi que le théorème A.12 (ii), nous avons, d'une part, que la dynamique de  $u'$  est la dérivée terme à terme de la dynamique de  $u$ , c-à-d. ,

$$du'(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''} \right) (t, x) dt + \Gamma'(t, x) dW_t, \quad (7.28)$$

d'autre part, que dans ce cas, les caractéristiques locales de  $u'$  données ci-dessus par le couple

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{u''} \right), \Gamma' \right)$$

appartiennent à la classe  $\mathcal{B}^{1,\delta}$ ,  $\delta > 0$ . Ainsi la condition nécessaire pour appliquer le lemme d'*Itô-Ventzel* est satisfaite.

Nous pouvons alors, dans ce contexte, considérer le processus composé  $u'(t, I)$ , et obtenir dans un premier temps que

$$du'(t, I(t, y)) = 0. \quad (7.29)$$

Par suite, en appliquant le lemme d'*Itô-Ventzel*, il en découle que le processus  $u'(t, I(t, y))$  évolue selon la dynamique

$$\begin{aligned} du'(t, I(t, y)) &= \frac{1}{2} \frac{2 \langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle u'' - u''' \|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{(u'')^2} (t, I(t, y)) dt \\ &+ \langle u''(t, I(t, y)), I(t, y) \rangle_t + u''(t, I) dI(t, y) + \frac{1}{2} u''' \langle I \rangle_t (t, y) \\ &+ \Gamma'(t, I(t, y)) dW_t. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Et donc, en égalisant (7.29) et (7.30), et en notant par  $\mu^I$  et  $V^I$  respectivement le drift et la volatilité de  $I$ , nous obtenons, en identifiant les termes en  $dW_t$  et ceux en  $dt$ , les équations suivantes :

$$\begin{cases} -u''(t, I) \mu_t^I = \left( \frac{1}{2} \frac{2 \langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle u'' - u''' \|\Gamma', \mathcal{K}\|^2}{(u'')^2} + \langle \Gamma'', V^I \rangle_t + \frac{1}{2} u''' \|V^I\|^2 \right) (t, I), \\ V^I(t, y) = -\Gamma'(t, I(t, y)) I'(t, y). \end{cases}$$

D'après la deuxième identité de ce système, et en utilisant (I), on a

$$\begin{cases} \langle u''(t, I(t, y)), I(t, y) \rangle_t = -I'(t, y) \langle \Gamma', \Gamma'' \rangle (t, I(t, y)) \\ \frac{\langle I \rangle_t(t, y)}{I'(t, y)} = I'(t, y) \|\Gamma'\|^2(t, I(t, y)). \end{cases}$$

Injectons ces égalités dans l'expression de  $\mu^I$  ci-dessus, ceci implique que

$$\begin{aligned} \mu^I(t, y) &= \\ &\left[ \frac{-1}{2} I'' (\|\Gamma', \mathcal{K}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2) - I'^2 (\langle \Gamma', \Gamma'' \rangle - \langle \Gamma', \mathcal{K}, (\Gamma', \mathcal{K})' \rangle) \right] (t, y) \end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme suivante, plus simple et utile pour la suite,

$$\mu^I(t, y) = \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [I' (\|\Gamma', \mathcal{K}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2)] (t, y). \quad (7.31)$$

Par conséquent, on a

$$dI(t, y) = \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ I'(\|\Gamma'^{\mathcal{K}}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2) \right] (t, y) dt - \Gamma'(t, I(t, y)) I'(t, y)$$

Finalement, en remarquant que

$$\|\Gamma'^{\mathcal{K}}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2 = -\|\Gamma'^{\perp}(t, I)\|^2,$$

nous obtenons que

$$dI(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ I' \|\Gamma'^{\perp}(t, I)\|^2 \right] (t, y) dt - \Gamma'(t, I(t, y)) I'(t, y). \quad (7.32)$$

En intégrant cette équation par rapport à  $y$ , et en notant par  $\tilde{\Gamma}(t, y)$  le vecteur  $\Gamma(t, I(t, y))$ , nous retrouvons bien la dynamique (7.33) de  $\tilde{u}$ .  $\square$

Donnons maintenant la preuve du Théorème 7.4.

*Démonstration.* (Théorème 7.4) Nous rappelons que, si  $\tilde{u}$  est la transformée de Fenchel-Legendre d'une utilité progressive dans l'univers d'investissement 5.2, il existe  $\tilde{v}$  tel que

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{v}(t, yH_t^{r, \eta})$$

où  $\tilde{v}$  est le dual convexe d'une utilité progressive  $v$  sur le marché martingale. D'après le théorème 7.3,  $\tilde{v}$  obéit à la dynamique

$$d\tilde{v}(t, y) = \frac{1}{2\tilde{v}''} \|\tilde{\Gamma}_v'^{\perp}\|^2(t, y) dt + \tilde{\Gamma}_v(t, y) dW_t \quad (7.33)$$

$$\text{où} \quad (7.34)$$

$$\tilde{\Gamma}_v(t, y) = \Gamma_v(t, -\tilde{v}')(t, y) \quad (7.35)$$

En appliquant le lemme d'*Itô-Ventzel*,  $\tilde{u}$  admet pour dynamique

$$\begin{aligned} d\tilde{u}(t, y) &= \tilde{v}(t, yH_t^{r, \eta}) \\ &= \frac{1}{2\tilde{v}''} \|\tilde{\Gamma}_v'^{\perp}\|^2(t, yH_t^{r, \eta}) dt + \tilde{\Gamma}_v(t, yH_t^{r, \eta}) dW_t \\ &\quad - \tilde{v}'(t, yH_t^{r, \eta}) yH_t^{r, \eta} (r_t dt + \eta_t dW_t) + \frac{(yH_t^{r, \eta})^2}{2} \tilde{v}''(t, yH_t^{r, \eta}) \|\eta_t\|^2 dt \\ &\quad - yH_t^{r, \eta} \langle \Gamma_v', \eta_t \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\tilde{v}''} \left( \|\tilde{\Gamma}_v'^{\perp}\|^2 - \|\tilde{\Gamma}_v'\|^2 + \|\tilde{\Gamma}_v' - yH_t^{r, \eta} \tilde{v}'' \eta_t\|^2 \right) dt \\ &\quad + \left( \tilde{\Gamma}_v - \tilde{v}' yH_t^{r, \eta} \eta_t \right) (t, yH_t^{r, \eta}) dW_t. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\tilde{\Gamma}_u(t, y) = \left( \tilde{\Gamma}_v - \tilde{v}' y H_t^{r, \eta} \eta_t \right) (t, y H_t^{r, \eta}),$$

ou encore

$$\tilde{\Gamma}'_u(t, y) = H_t^{r, \eta} \left( \tilde{\Gamma}'_v - \tilde{v}' H_t^{r, \eta} \eta_t - y \tilde{v}'' H_t^{r, \eta} \eta_t \right) (t, y H_t^{r, \eta}).$$

En injectant ces deux dernières identités dans la dynamique de  $\tilde{u}$  ci-dessus, nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

En guise de conséquence directe du théorème 7.3, nous énonçons les résultats suivants.

**Théorème 7.5.** *Supposons, en plus de l'hypothèse 7.4, que pour tout  $t \geq 0$ ,  $x > 0$ , la dérivée  $\Gamma'(t, x)$  est dans l'espace des contraintes  $\mathcal{K}_t \sigma_t$ . Alors, la transformée de Fenchel  $\tilde{u}$  ainsi que sa dérivée  $\tilde{u}' = -I$  sont des martingales suivant les dynamiques respectives*

$$d\tilde{u}(t, y) = -\Gamma(t, -\tilde{u}')(t, y) dW_t, \quad (7.36)$$

$$dI(t, y) = -I_y(t, y) \Gamma'(t, I(t, y)) dW_t. \quad (7.37)$$

De plus, la mesure martingale minimale dans ce marché martingale est constante, c-à-d.  $H^u = 1$ .

En particulier, nous pouvons déduire les deux corollaires suivants

**Corollaire 7.2.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i)  $u$  est une utilité progressive.

ii)  $\tilde{u}$  est une martingale de la forme (7.36).

iii)  $I = (u')^{-1}$  est une martingale de la forme (7.37).

ou encore

**Corollaire 7.3.** *Soit  $v(., x)$  une martingale quelconque, vérifiant :*

$$x \longmapsto v(t, x) \text{ est convexe décroissante pour tout } t \geq 0.$$

*Notons  $\check{v}$  le conjugué inverse de  $v$  défini par*

$$\check{v}(t, x) = \inf_y (v(t, y) + xy).$$

*Si de plus la dérivée de la volatilité de la martingale  $v$  est dans l'espace des contraintes  $\mathcal{K}\sigma$ , alors nous avons :*

*i)  $\check{v}$  est une utilité progressive sur ce marché particulier  $\mathcal{M}^{0,0}$ .*

*ii) Soit  $Y$  un processus atteignable strictement positif, alors*

$$u(t, \hat{x}) = \check{v}(t, \hat{x}Y_t)$$

*est aussi une utilité progressive sur  $\mathcal{M}^{0,0,Y}$ , le marché de numéraire  $Y^{-1}$ .*

**Remarque 7.6.** *On fera les deux remarques suivantes :*

- *L'hypothèse que  $\Gamma'(t, x)$  soit dans l'espace des contraintes  $\mathcal{K}_t\sigma_t$  est équivalente à dire que la dérivée de la volatilité  $\Gamma'$  de l'utilité est telle que  $\Gamma'\sigma^{-1}$  soit une stratégie admissible dans  $\mathcal{K}$ .*
- *Si le marché est complet, c-à-d.  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$ , alors l'hypothèse  $\Gamma' \in \mathcal{K}\sigma$  est toujours vraie. Par conséquent, ces derniers résultats restent encore vrais.*

## 7.5 Dual progressif

Dans cette section, nous développons la nouvelle notion du *dual progressive* sur un marché financier  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ , marché introduit dans 5.2. Dans ce but, nous avons besoin de rappeler quelques définitions nécessaires associées à ce marché.

Nous notons par  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  l'ensemble des martingales locales défini par

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) := \{L : LX^\pi \text{ une martingale local positive, } \forall \pi \in \mathcal{K}\}.$$

Dans l'article de Kramkov et al. [60] cet ensemble est souvent noté  $\mathcal{Y}$ . Avec la notation  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ , nous faisons référence à l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$ , car dans le modèle de marché considéré dans notre étude, nous pouvons expliciter  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  (voir Karatzas et al [55], [54] ), comme

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) := \{L^\nu : L_{s,t}^\nu \triangleq \exp \left( \int_s^t \nu_r \sigma_r dW_r - \int_0^t \|\nu_r \sigma_r\|^2 dr \right), \nu \in \mathcal{K}^*\} \quad (7.38)$$

où  $\mathcal{K}^*$  est le cône dual de  $\mathcal{K}$  (définition B.14).

**Remarque 7.7.** Dans les travaux de Karatzas et al [55] et [54], les auteurs étudient un problème d'optimisation de portefeuille classique à horizon  $T$ , tel que les proportions  $\pi/X^\pi$  investies sur le marché sont contraintes dans un convexe fermé indépendant du temps. Les auteurs montrent ([55] lemme 5.6 p. 287) que si

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T \|\nu_t \sigma_t\|^2 dt \right) \rightarrow +\infty,$$

nécessairement  $\tilde{u}(T, L_T^\nu) \rightarrow +\infty$ , de sorte qu'on peut se limiter à considérer uniquement l'ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$  à la place de  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  dans le programme d'optimisation dual où  $\mathcal{D}$  est défini par

$$\mathcal{D} := \{L^\nu : \mathbb{E} \left( \int_0^T \|\nu_t \sigma_t\|^2 dt \right) < \infty\}.$$

Comme les utilités considérées dans notre étude sont stochastiques et comme la technique utilisée dans la preuve du lemme 5.6 p. 287 de [55], ne peut être appliquée à notre cadre, il n'y a aucune raison de se restreindre à l'ensemble  $\mathcal{D}$  comme dans [55] nous considérons, par conséquent, tout l'ensemble  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  comme l'espace dans lequel nous optimisons.

Maintenant, nous associons à l'espace dual  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  la définition suivante.

**Définition 7.2.** Nous appelons *dual progressif* issu de la condition initiale  $\tilde{u}(0, y)$ , tout processus stochastique  $\tilde{u}(t, y)_{t,y}$  vérifiant

- (i) **Propriété de Convexité :** Pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \mapsto \tilde{u}(t, x)$  est un processus croissant strictement convexe en  $x$ .

## 7.6. Dual d'une utilité progressive vs dual progressif

---

(ii) **Consistance avec l'univers dual :** Pour toute martingale  $L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ , l'inégalité suivante est satisfaite

$$\tilde{u}(s, y) \leq \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \quad (7.39)$$

pour tout  $y$  et pour tout  $(s, t)$  tel que  $t \geq s$ .

(iii) **Existence d'une mesure martingale optimale :** Il existe une mesure martingale, notée  $L^{y, \tilde{u}} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ , pour laquelle nous avons l'identité

$$\tilde{u}(s, y) = \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t}^{y, \tilde{u}})/\mathcal{F}_s). \quad (7.40)$$

Le processus  $L^{y, \tilde{u}}$  est appelé processus de mesure martingale équivalente optimale.

Remarquons qu'en particulier, tout processus *dual progressif* vaut sa propre fonction valeur, c-à-d.

$$\tilde{u}(s, y) = \inf_{L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s). \quad (7.41)$$

Cette définition est très similaire à celle des utilités progressives. Ce choix n'est pas quelconque car nous avons montré, dans le cadre classique à travers les théorèmes 3.3 et 3.6, que le dual convexe de la fonction valeur est à son tour la fonction valeur associée à un problème d'optimisation dual de type (7.41) (avec un horizon  $T$ ). Ainsi, le but du paragraphe suivant est de généraliser ces résultats de manière à les étendre au cadre des utilités progressives, c-à-d. prouver que le dual convexe d'une utilité progressive est un *dual progressif*. Ceci sera le but du paragraphe suivant.

## 7.6 Dual d'une utilité progressive vs dual progressif

Comme nous l'avons déjà annoncé, le but de cette section est de montrer que le dual convexe d'une utilité progressive est un *dual progressif*, c-à-d. prouver le résultat suivant.



**Théorème 7.6.** *Le dual convexe  $\tilde{u}$  d'une utilité progressive est un dual progressif. En particulier, si nous notons par  $(L_t^{y,\tilde{u}})_{t,y}$  le processus de mesure martingale optimale équivalente, alors  $L^{y,\tilde{u}}$  satisfait*

$$L_t^{u'(s,x),\tilde{u}} = H_{s,t}^{x,u} = \frac{u'(t, X_t^{s,x,*})}{u'(s,x)}, p.s. \text{ pour tout } x > 0, t \geq s.$$

*Démonstration.* La preuve consiste à vérifier que  $\tilde{u}$  satisfait les trois conditions de la définition 7.2 :

(i) La convexité est une conséquence immédiate de la définition de la transformée de *Fenchel* d'un processus partout fini. Reste à vérifier les assertions de consistance avec l'univers dual et l'existence d'une martingale équivalente optimale au problème dual (7.41).

(ii) Ensuite par définition du dual convexe, il est facile de voir que, pour tout  $L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ ,

$$\tilde{u}(t, yL_{s,t}) \geq u(t, X_t^{s,x,u}) - yL_{s,t}X_t^{s,x,u}.$$

Or, par définition de l'ensemble  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  (équation (7.38)), le processus  $L_{s,t}X_t^{s,x,u}$  est une surmartingale positive. Comme par optimalité de la richesse  $X^{s,x,u}$  le processus  $(u(t, X_t^{s,x,u}))_{t \geq 0}$  est une martingale, il s'ensuit en prenant l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(u(t, X_t^{s,x,u})/\mathcal{F}_s) - y\mathbb{E}(L_{s,t}X_t^{s,x,u}/\mathcal{F}_s) \geq u(s, x) - yx.$$

En particulier si  $x = -\tilde{u}'(s, y) = (u')^{-1}(s, y)$ , cette dernière inégalité se réécrit, par définition du dual convexe  $\tilde{u}$  (définition 7.1, équation (7.4)), comme suit

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq u(s, (u')^{-1}(s, y)) - y(u')^{-1}(s, y) = \tilde{u}(s, y) \quad (7.42)$$

qui n'est autre que la propriété duale de la consistance avec l'univers d'investissement.

Considérons maintenant, le processus  $H^u$  défini dans (7.12) par

$$H_{s,t}^{x,u} = \frac{u'(t, X_t^{s,x,u})}{u'(s, x)} > 0 \text{ p.s.}$$

### 7.6. Dual d'une utilité progressive vs dual progressif

et désignons par  $L^{y,\tilde{u}}$  le processus défini par  $L_t^{y,\tilde{u}} = H_{s,t}^{(u')^{-1}(s,y),u}$ . En particulier nous avons l'identité,

$$(u')^{-1}(t, yL_t^{y,\tilde{u}}) = X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\tilde{u}(t, yL_t^{y,\tilde{u}}) = u(t, X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}) - L_t^{y,\tilde{u}} X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}.$$

Comme  $(H_{s,t}^{x,u} X_t^{s,x,u})_{t \geq s}$  est une martingale, il en est de même pour

$$(L_t^{(u')^{-1}(s,y),\tilde{u}} X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u})_{t \geq s}.$$

Rajoutons à cela le fait que  $u(t, X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u})$  est une martingale par optimalité de  $X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}$ , on déduit que la processus  $\tilde{u}(t, yL_t^{y,\tilde{u}})$  est une martingale. Combinons ceci avec l'inégalité (7.42), il s'ensuit

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq \tilde{u}(s, y) = \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t}^{y,\tilde{u}})/\mathcal{F}_s), \quad \forall L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$$

ce qui prouve l'optimalité du processus  $L^{y,\tilde{u}}$  et achève la démonstration. □

Ainsi, nous avons montré que le processus  $H^u$  défini dans (7.12) est bien la mesure martingale minimale du problème d'optimisation (7.41). Nous pouvons alors facilement établir, à l'aide de la proposition 7.3, que les assertions (iv) et (v) du théorème 3.6 établi par Kramkov *et al.* [60] restent vraies dans le cadre étudié ici, c-à-d. :

**Proposition 7.5.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a*

- *Le processus  $(X_t^{s,x,u} H_{s,t}^{x,u})_{t \geq s}$  tel que  $u'(s, x) H_{s,t}^{x,u} = u'(t, X_t^{s,x,u})$  est une martingale, c-à-d.*

$$\mathbb{E}(X_t^{s,x,u} H_{s,t}^{x,u} / \mathcal{F}_s) = x.$$

- *De manière équivalente à la deuxième assertion de la proposition 7.3, le processus  $(H_{s,t}^{y,u} \tilde{u}'(s, yH_{s,t}^{y,u}))_{t \geq s}$  est une martingale, c-à-d.*

$$\tilde{u}'(s, y) = \mathbb{E}(H_{s,t}^{y,u} \tilde{u}'(s, yH_{s,t}^{y,u}) / \mathcal{F}_s).$$

Dans la suite, nous nous intéressons à un cas particulier des utilités progressives, celui des utilités progressives décroissantes dans le temps. Nous présentons les résultats existants, puis nous donnerons une interprétation assez intéressante de ce cas.

## 7.7 Utilités décroissantes

### 7.7.1 Utilités décroissantes : résultats existants

Nous étudions dans ce paragraphe le cas particulier des utilités progressives décroissantes dans le temps. D'après la décomposition de *Doob-Meyer*, la volatilité  $\Gamma$  de ces utilités est nulle, il s'ensuit, d'après la dynamique (5.37) corollaire 5.2, qu'elles sont solutions de l'équation

$$dv(t, x) = \frac{v'^2}{2v''}(t, x) \|\eta_t\|^2 dt, \quad (7.43)$$

ce qui est équivalent à

$$v_t(t, x) = \frac{v'^2}{2v''}(t, x) \|\eta_t\|^2. \quad (7.44)$$

Comme  $v$  est strictement concave,  $v_t$  est alors négative, d'où la décroissance dans le temps.

C'est un cas assez particulier des utilités progressives, car tout simplement c'est le cas d'utilité progressive dont le paramètre  $\Gamma$  est nul.

Ces utilités ont été étudiées pour la première fois par Hobson et Henderson dans [43], Musiela et Zariphopoulou dans [88] et enfin par Tehranchi [36].

Les auteurs supposent que le marché est incomplet dans le sens où la filtration  $\mathcal{F}$  n'est pas forcément celle générée par le mouvement brownien  $W$ . Afin d'établir leurs principaux résultats, quelques hypothèses leur ont été nécessaires :

**Hypothèse 7.5.** *La stratégie  $\eta\sigma^{-1}$  est une stratégie admissible.*

Dans le contexte de marché incomplet qu'on considère, cette hypothèse est équivalente à supposer que  $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K}$ .

**Hypothèse 7.6.** *La fonction  $v : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est telle que :*

- $x \mapsto u(t, x)$  satisfait les conditions d'Inada.
- Les dérivées partielles  $u_t$ ,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$  et  $u_{tx} = u_{xt}$  sont bien définies et continues dans  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .

Sous ces hypothèses, les auteurs montrent les deux résultats qui suivent :

**Théorème 7.7.** *Soit  $(t, x) \mapsto v(t, x, \omega)$  solution de (7.43) vérifiant l'hypothèse 7.6. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  *$v$  est une utilité progressive, il existe une variable aléatoire scalaire  $C$  telle que la stratégie optimale  $\pi^*$  s'écrit*

$$\pi_t^* \sigma_t = C_t \eta_t.$$

- ii) *Il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  et une mesure finie  $\nu$  à support dans  $[0, +\infty)$  avec  $\nu(0) = 0$  dont la transformée de Laplace est partout finie et telles que*

$$\tilde{v}(t, y, \omega) = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{1-r} (1 - y^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds}) \nu(dr) + C, \quad p.s. \quad (7.45)$$

où  $\tilde{v}$  désigne la transformée duale de  $v$ .

Rappelons que l'implication  $i) \Rightarrow ii)$  a été prouvée d'abord par Henderson et Hobson [43].

Une des conséquences directes de ce dernier résultat est le corollaire suivant.

**Corollaire 7.4.** *Soit  $v^0$  une fonction d'utilité de  $(0, +\infty)$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors, il existe une utilité progressive  $v$  solution de (7.43), vérifiant l'hypothèse 7.6 avec  $v(0, x, w) = v^0(x)$  si et seulement si il existe une mesure finie  $\nu$  telle que*

$$(v_x^0)^{-1}(y) = - \int_{(0, +\infty)} y^{-r} \nu(dr). \quad (7.46)$$

Dans ce cas, elle est unique et donnée par (7.45). En particulier le portefeuille optimal est donné par

$$X_{s,t}^x = \int_{(0, +\infty)} (v'(s, x))^{-r} \mathcal{E}\left(r \int_s^t \eta_s (dW_s + \eta_s ds)\right) \nu(dr) \quad (7.47)$$

où  $\mathcal{E}\left(\int_s^t \nu_s dW_s\right) = e^{\int_s^t \nu_s dW_s - \frac{1}{2} \int_s^t \|\nu_s\|^2 ds}$ .

Ce résultat est très important car il montre que si  $v$  est une utilité progressive, décroissante dans le temps, alors sa condition initiale  $v^0$  ne peut être quelconque, elle est forcément de la forme (7.46).

**Remarque 7.8.** – *Il est important de noter que cette richesse optimale, donnée par (7.47), est strictement croissante par rapport à la condition initiale  $x$ . De plus comme  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  par rapport à cette variable, il s'ensuit que la richesse optimale est deux fois différentiable par rapport à sa condition initiale.*

- *En dérivant (7.45) par rapport à  $y$ , et en considérant le changement de variable  $\lambda = \log(y)$  pour  $y > 0$ , on obtient que*

$$\tilde{v}'(t, y) = - \int_{(0, +\infty)} y^{-r} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \nu(dr). \quad (7.48)$$

*Donc  $\tilde{v}'(t, e^\lambda)$  est la transformée de Laplace de la mesure  $e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \nu(\cdot)$ .*

Dans le cas où le processus  $\eta$  ne s'annule pas, Musiela et Zariphopoulou dans [88] interprètent le terme  $\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds$  (strictement positif par hypothèse et strictement croissant) comme un changement de temps.

Convaincu que ce terme est plutôt lié à un changement de numéraire et ceci essentiellement par la présence de la prime de risque du marché  $\eta$  qui est encore la volatilité du numéraire du marché  $(H^{r,\eta})^{-1}$ , le paragraphe suivant sera dédié à comprendre ce lien éventuel.

**NB :** La preuve de ces deux résultats est fournie dans [36], nous ne la reprenons pas dans notre développement.

## 7.7.2 Utilités décroissantes et changement de numéraire

Les utilités décroissantes, décrites dans le paragraphe précédent, sont des processus d'utilités progressives définis sur le marché  $\mathcal{M}^{0,\eta}$ . Dans le but de mieux comprendre la formule (7.45) du théorème et plus particulièrement le terme

$$\exp\left(\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds\right),$$

on se placera sur le marché martingale associé en utilisant un changement de numéraire appliqué à ces utilités.

Le numéraire qu'on va considérer dans toute la suite est le numéraire du marché donné par

$$L_t^\eta = \exp \left( - \int_0^t \eta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds \right). \quad (7.49)$$

Nous définissons alors l'utilité progressive  $u$ , dans ce nouveau marché, par

$$u(t, x) = v(t, \frac{x}{L_t^\eta}). \quad (7.50)$$

Le but, dans la suite, est donc de montrer la proposition suivante :

**Proposition 7.6.** *Ainsi défini, dans le nouveau numéraire, le processus d'utilité progressive  $u$  est tel que son dual convexe  $\tilde{u}$  est une martingale donnée par*

$$\tilde{u}(t, y) = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{1-r} (1 - y^{1-r} L_t^{(1-r)\eta}) \nu(dr) + C, \quad (7.51)$$

où  $C$  désigne une constante.

La mesure martingale introduite dans les sections précédentes de ce chapitre (voir équation 7.14) est constante et vaut 1, et ce quelle que soit la mesure  $\nu$ .

*Démonstration.* Le fait que  $u$  soit une utilité progressive sur le marché  $\mathcal{M}^{0, \eta, L^\eta}$  est une conséquence des résultats établis dans les sections précédentes.

Ensuite, on a

$$\tilde{u}(t, y) = \inf_{x>0} \{u(t, x) - xy\} = \inf_{x>0} \{v(t, \frac{x}{L_t^\eta}) - xy\}. \quad (7.52)$$

Donc, en faisant le changement de variable  $x = x/L$ , on obtient que

$$\tilde{u}(t, y) = \inf_{x>0} \{v(t, x) - xy L_t^\eta\} = \tilde{v}(t, y L_t^\eta). \quad (7.53)$$

Donc, dans un premier temps, on a

$$\tilde{u}(t, y) = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{1-r} \left( 1 - y^{1-r} (L_t^\eta)^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \right) \nu(dr) + C, \quad (7.54)$$

où  $C$  désigne une constante. Ensuite, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (L_t^\eta)^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} &= e^{-(1-r) \int_0^t \eta_s dW_s - (1-r) \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \\ &= e^{-(1-r) \int_0^t \eta_s dW_s - \frac{(1-r)^2}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \\ &= L_t^{(1-r)\eta}, \end{aligned} \quad (7.55)$$

ce qui prouve l'expression (7.51).

Puis, par une simple application du lemme d'Itô à l'équation (7.51), il s'ensuit que  $\tilde{u}$  est martingale dont la volatilité est proportionnelle à  $\eta$ . Or, d'après l'hypothèse 7.5,  $\eta$  est une stratégie admissible, alors nous en déduisons, enfin, par le théorème 7.6, que la mesure martingale minimale (optimale) générée par  $\tilde{u}$  est constante et vaut 1.  $\square$

**Remarque 7.9.** *En remarquant que  $\Gamma_u(t, x) = xu'(t, x)\eta_t \in \mathcal{K}_t\sigma_t$ , par une simple application de la formule d'Itô généralisée, ceci nous permet de déduire directement que  $\tilde{u}$  est une martingale d'après le théorème 7.3.*

Notons que, d'après ce résultat, si  $\tilde{u}$  est la transformée de *Laplace* à la date  $t = 0$  d'une mesure  $\nu$ , alors à tout instant  $t$ , elle est la transformée de *Laplace* d'une mesure stochastique martingale donnée par

$$\nu_t(dr) = L_t^{(1-r)\eta}\nu(dr).$$

### 7.7.3 Une famille de problèmes d'optimisation auxiliaires

En utilisant les résultats du théorème 7.7.2, dû à M. Tehranchi et al. [36], nous avons montré dans la proposition 7.6 que le dual convexe  $\tilde{u}$  d'une utilité progressive  $u$ , issue par un changement de numéraire  $(L^\eta = H^{0,\eta})^{-1}$  d'une seconde utilité progressive décroissante, est une martingale de la forme (7.51), c-à-d.

$$\tilde{u}(t, y) = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{1-r} (1 - y^{1-r} L_t^{(1-r)\eta}) \nu(dr) + Cte.$$

Remarquons que l'intégrand dans cette équation, défini par

$$\tilde{u}(t, y, r) = \frac{1}{1-r} (1 - y^{1-r} L_t^{(1-r)\eta}) \quad (7.56)$$

est non seulement une martingale, mais aussi le dual convexe d'une utilité progressive que nous noterons  $u(t, x, r)$ . En effet, il suffit de prendre  $\nu = \delta_r$  dans l'équation (7.51) pour s'en convaincre.

Comme  $v(\cdot, \cdot, r)$  est de type puissance, il est simple de montrer que le primal  $u(t, x, r)$  est une utilité puissance dont l'aversion au risque est donnée par  $1/r$  et telle que

$$u(t, x, r) = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} x^{1 - \frac{1}{r}} (L_t^{(1-r)\eta})^{-\frac{1}{r}}. \quad (7.57)$$

Le but de la suite est de comprendre si le fait que ces utilités soient toutes de même type, notamment assez particulier, à savoir puissance, a joué un rôle fondamental dans l'établissement de la formule (7.51).

Pour cela, nous allons étudier les portefeuilles optimaux  $X_t^r$  que génèrent ces utilités. L'idée, par la suite, est de vérifier que l'intégrale par rapport à  $r$  de ces richesses optimales est bien la richesse optimale associée à  $u$ , donnée par la formule (7.47).

Dans cette étude, nous partons, contrairement à ce que nous avons l'habitude de faire, du processus dual  $\tilde{u}(t, y, r)$  et nous étudions le processus primal  $u(t, x, r)$ . Nous ferons de même pour les richesses initiales :  $y$  étant fixée, le capital initial au problème d'optimisation associé à  $u(t, \cdot, r)$  sera donné par

$$x_r = -\tilde{u}'(0, y, r) = (u'(0, x))^{-r}$$

Une fois que nous avons fixé la richesse initiale  $x_r$  relative au problème d'optimisation de portefeuille associé à l'utilité progressive  $u(\cdot, \cdot, r)$ , nous pouvons étudier la richesse optimale qu'elle génère à partir de ce capital de départ.

Pour cela, nous allons utiliser la proposition 7.6. En effet, dans la deuxième partie de ce résultat, nous avons montré que la mesure martingale minimale associée à  $\tilde{u}$  est identique à 1 quelle que soit la mesure  $\nu$  que nous choisissons, en particulier ceci est encore vrai pour un choix de  $\nu = \delta_r$ , où  $\delta_r$  désigne la mesure de *Dirac* au point  $r$ . En d'autres termes, ceci nous permet de conclure que la mesure martingale, que nous noterons  $Y^{y,r}$ , associée au problème dual  $\tilde{u}(\cdot, y, r)$  est constante et vaut 1 (la même que celle de  $\tilde{u}$  notée  $Y^y$ ).

Par ailleurs, nous savons que les mesures martingales minimales et les richesses optimales sont liées par

$$\begin{cases} X_t^{x_r, r} = \tilde{u}'_y(t, yY^{y,r}, r), \\ X_t^{x, u} = \tilde{u}'_y(t, yY^y), \end{cases} \quad (7.58)$$

où nous avons noté  $X^{x_r, r}$  (respectivement  $X^{x, u}$ ) les richesses optimales associées au problème en  $u(\cdot, x_r, r)$  (respectivement en  $u$ ).

**Remarque 7.10.** *Remarquons que la richesse initiale associée au problème d'optimisation en  $u$  est  $x \neq x_r$ . En effet,  $x$  est donné par  $x = -\tilde{u}'(t, y)$ . Elle*



s'écrit par conséquent, en utilisant l'identité  $x_r = -\tilde{u}'(t, y, r)$  et la définition même de  $\tilde{u}(t, y, r)$ , sous la forme

$$x = \int_{(0, +\infty)} x_r \nu(dr). \quad (7.59)$$

Comme les mesures martingales minimales sont toutes égales à 1, il s'ensuit que

$$X_t^{x_r, r} = y^{-r} L_t^{(1-r)\eta}, \quad y = u'(0, x). \quad (7.60)$$

De même, la richesse optimale  $X^{x, u}$ , associée au problème général en  $u$ , est donnée par conséquent à partir de (7.51) par

$$X_t^{x, *} = -\tilde{v}(t, Y^{t, y, *}) = \int_{(0, +\infty)} ((y^{-r} L_t^{(1-r)\eta}) \nu(dr), \quad y = u'(0, x). \quad (7.61)$$

Finalement, d'après (7.60), elle se réécrit sous

$$X_s^{t, x, *} = \int_{(0, +\infty)} X_s^{t, x_r, r} \nu(dr), \quad t \leq s \leq T, \quad (7.62)$$

d'où le lemme suivant :

**Lemme 7.3.** *Dans ce cadre particulier de fonction d'utilité, la richesse optimale associée au problème, où l'utilité est  $u$ , s'exprime en fonction de celles des problèmes auxiliaires en  $u(., ., r)$  de la manière suivante,*

$$X_s^{t, x, *} = \int_{(0, +\infty)} X_s^{t, x_r, r} \nu(dr), \quad t \leq s \leq T, \quad (7.63)$$

$$x_r = (u'(0, x))^{-r} \quad (7.64)$$

### Interprétation :

L'égalité (7.61) est équivalente à dire que la richesse optimale au problème d'optimisation de portefeuille, avec  $u$  comme utilité, est égale à la somme pondérée par la mesure  $\nu$  de toutes les richesses optimales associées aux problèmes d'optimisation auxiliaires (7.57) et ce en faisant varier l'aversion au risque relative  $1/r$  entre 0 et  $+\infty$ .

La richesse  $X_t^{x_r, r} \nu(dr)$  s'interprète, alors, comme la proportion optimale que l'investisseur doit investir si son aversion au risque relative (aléatoire) vaut  $1/r$  à l'instant  $t$  avec une densité  $\nu(dr)$ .

# Chapitre 8

## Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>233</b>
8.1.1	Motivation . . . . .	233
8.1.2	Une nouvelle approche . . . . .	235
<b>8.2</b>	<b>Caractérisation des utilités progressives ayant le même portefeuille optimal . . . . .</b>	<b>235</b>
8.2.1	Définition des utilités équivalentes . . . . .	235
8.2.2	Synthèse des conditions d'optimalité . . . . .	236
<b>8.3</b>	<b>Approche par les flots stochastiques . . . . .</b>	<b>237</b>
8.3.1	Richesse optimale monotone . . . . .	238
8.3.2	La richesse optimale comme flot stochastique . . . . .	239
<b>8.4</b>	<b>Construction des utilités progressives de por- tefeuille optimal donné . . . . .</b>	<b>240</b>
8.4.1	Existence d'une utilité progressive pour un por- tefeuille optimal donné . . . . .	240
8.4.2	Construction de toutes les utilités progressives de portefeuille optimal donné . . . . .	243

<b>8.5</b>	<b>Dual progressif . . . . .</b>	<b>248</b>
<b>8.6</b>	<b>Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire</b>	<b>249</b>
8.6.1	Utilités progressives de type puissances et richesses optimales . . . . .	250
8.6.2	Aversion au risque aléatoire et portefeuille optimal	250
<b>8.7</b>	<b>Flots et EDP stochastiques . . . . .</b>	<b>253</b>
8.7.1	Formule d'Itô pour les flots stochastiques et flots inverses . . . . .	254
8.7.2	EDP stochastique de l'utilité définie à partir de la composition des flots . . . . .	256
<b>8.8</b>	<b>Retour sur le marché initial . . . . .</b>	<b>260</b>
8.8.1	Conditions nécessaires d'optimalité dans cet uni- vers et constructions des utilités progressives . .	261
8.8.2	Quelques remarques . . . . .	262

---

*Résumé : Nous avons vu dans les chapitres précédents comment les méthodes classiques d'équation aux dérivées partielles et de dualité nous permettent de comprendre les processus d'utilités progressives et leur dual convexe. La volatilité  $\Gamma$  de ces utilités joue un rôle fondamental dans ce nouveau concept d'utilités. Le terme  $\Gamma'/u'$  s'interprète comme une prime de risque supplémentaire, entièrement générée par l'utilité stochastique. Par contre, ces approches classiques ne nous permettent pas de répondre à toutes les questions que nous nous sommes posées et qui sont essentiellement : l'unicité, l'existence et surtout comment construire ces utilités dans un cadre général. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser au développement d'une nouvelle approche de ces problèmes d'optimisation de portefeuille même dans le cas classique. L'idée de ce chapitre est très simple, basée sur l'interprétation de la dérivée de l'utilité tout au long de la trajectoire optimale. La nouvelle approche que nous proposons est une approche efficace basée simplement sur des techniques de changement de variables, inversion de flot stochastique et sur les conditions nécessaires d'optimalité que nous rappelons dans une première partie de ce chapitre.*

*Dans le paragraphe 8.4.1, et sous l'hypothèse de monotonie de la richesse optimale, nous montrons dans le cas où cette richesse  $X^*$  est une vraie martingale*

qu'il existe au moins une utilité progressive dont l'optimum est  $X^*$  et la mesure martingale minimale est constante.

Dans le paragraphe 8.4.2, toujours partant des mêmes idées et hypothèses, et après avoir introduit la notion de flot stochastique et rappelé l'hypothèse de recollement des stratégies, nous proposons de construire toutes les utilités progressives dont le portefeuille optimal est donné. Bien que le fait que la mesure martingale minimale ne soit pas constante soit une difficulté supplémentaire, les preuves ainsi établies dans le cas particulier où les ensembles de contraintes  $(\mathcal{K}_t)_{t \geq 0}$  sont des espaces vectoriels se généralisent simplement au cas général des cônes convexes.

Dans une troisième partie de ce chapitre et à l'aide des techniques de composition et d'inversion des flots stochastiques, nous établissons une deuxième preuve des résultats précédents en se basant sur les EDP stochastiques. Ceci nous permet alors de faire le lien avec les résultats des chapitres précédents et de proposer une méthode de résolution des EDP stochastiques associées aux utilités progressives.

Enfin, nous retournons à l'univers d'investissement de départ décrit dans 5.2 et où le taux court et la prime du marché sont notés respectivement par  $r$  et  $\eta$ . Puis, nous montrons que les utilités progressives décroissantes étudiées par Zariphopoulou et al. [88] et M. Tehranchi et al. [36] et que nous avons abordées dans 7.7 représentent de bons exemples s'écrivant sous la forme d'une primitive de la composée de deux flots stochastiques inversibles. Ceci vient par conséquent appuyer notre approche.

## 8.1 Introduction

### 8.1.1 Motivation

Nous avons vu dans les deux derniers chapitres et particulièrement dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2 que, étant donnés une condition initiale  $u(0, \cdot)$  et un ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$ , il existe une très large classe d'utilités *progressives* cohérentes avec ce marché financier et cette condition initiale. En d'autres termes, telles qu'elles sont définies, les utilités progressives ne sont pas uniques,

la situation est donc différente de la situation classique, où la fonction de valeurs associée au problème d'optimisation de portefeuille avec utilité terminale donnée est unique. Ceci n'est pas surprenant car le choix de l'utilité aujourd'hui ne fixe pas celle du futur.

L'idée est alors de définir des classes d'équivalence qui rassemblent toutes les utilités progressives ayant certains critères en commun. La question qui se pose essentiellement est la suivante : quel critère choisir pour définir une classe ?

Pour comprendre le choix que nous effectuerons dans la suite, rappelons les notions de base (Chapitre 1) suivantes :

- Une fonction d'utilité est une représentation numérique des préférences d'un agent sur le marché financier. Elle sert à identifier sa stratégie optimale d'investissement selon le critère de l'utilité espérée.
- Dans le cas *classique*, il est bien connu que deux fonctions d'utilités qui ont même aversion au risque sont équivalentes dans le sens où elles génèrent la même richesse optimale à la maturité  $T$ , pour tout capital initial  $x$ . Ceci est essentiellement dû au fait qu'un investisseur ne fait la différence entre deux utilités que si et seulement si les richesses optimales associés aux deux problèmes d'optimisation sont différentes. En effet, tout ce qui intéresse un agent financier est le gain réalisé à la date de maturité de sa gestion et son risque.

Donc, dire que deux utilités qui ont la même richesse optimale sont équivalentes est un bon critère de définition. Comme les utilités *progressives* sont indépendantes de la maturité, contrairement aux utilités *classiques*, cela revient à imposer que les portefeuilles optimaux soient identiques pour toute richesse initiale et à tout instant  $t \geq 0$  et non seulement à l'horizon comme dans le cadre *classique*.

### 8.1.2 Une nouvelle approche

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives sont très difficiles à exploiter, en particulier il est difficile de caractériser les propriétés de la volatilité qui garantissent que la résolution de l'EDPS conduira à des solutions concaves et monotones. Ces questions sont encore restées sans réponse, sauf dans le cas où la volatilité est nulle (mais le marché non martingale) comme l'ont montré M. Tehranchi et al [36] et Zariphopoulou et al. [88].

Dans ce chapitre nous proposons une troisième manière d'aborder ces questions autour des utilités progressives, qui n'est ni une approche par des équations aux dérivées partielles ni par des méthodes de dualité ; il s'agit tout simplement d'une méthode de changement de variable et d'inversion de flots stochastiques. En effet, puisque nous connaissons plusieurs propriétés de la dérivée d'une utilité progressive tout au long de la trajectoire optimale (c-à-d.  $u'(t, X^{x,u})$ ) données par les propriétés 8.1, la question est la suivante : Pouvons nous tirer plus d'informations sur la dérivée en elle-même  $u'(t, x)$  à partir de ces propriétés ?

## 8.2 Caractérisation des utilités progressives ayant le même portefeuille optimal

### 8.2.1 Définition des utilités équivalentes

Pour simplifier, nous nous plaçons dans un **marché martingale**, dans lequel le numéraire de marché est pris comme numéraire de référence.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 6, cela implique en particulier qu'il n'y a pas de taux d'intérêt, ni de prime de risque c-à-d.  $r = 0$ , et  $\eta = 0$ , et que les richesses admissibles sont des martingales locales.

Utiliser un marché martingale n'est qu'un choix de représentation ; une fois établis les résultats recherchés dans cet univers d'investissement, nous pouvons toujours retraduire les résultats dans n'importe quel marché par la technique du changement de numéraire, que nous avons exposée dans le chapitre 6 ; l'équivalence entre les utilités progressives dans les différents marchés donnée par le

théorème 6.1 est évidemment un résultat clé pour le faire.

**Définition 8.1.** *Dans un marché martingale donné, deux utilités progressives  $u$  et  $v$  sont équivalentes si les portefeuilles optimaux correspondants,  $X^{x,u}$  et  $X^{x,v}$ , sont indistinguables, pour toute richesse initiale  $x > 0$ . La classe d'équivalence associée à un processus de richesse optimal  $X^*(x)$  est désignée par  $\mathcal{U}(X^*)$ .*

## 8.2.2 Synthèse des conditions d'optimalité

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats et notations, établis dans les chapitres précédents, qui joueront un rôle important dans la suite. Étant donnée une utilité progressive  $u$ , les conditions d'optimalité dans un marché "martingale" impliquent que la dérivée de l'utilité étudiée tout au long du portefeuille optimal, c-à-d.  $(u'(t, X_t^{x,u}))$ , est une martingale locale positive que nous désignons par  $(\mathcal{Y}_u(t, x))_{t \geq 0, x > 0}$ . Nous avons montré dans le théorème 7.6 paragraphe 7.6 du chapitre précédent, que la martingale normalisée  $\mathcal{Y}_u(t, x)/\mathcal{Y}_u(0, x)$  est la mesure martingale optimale du problème d'optimisation dual. La notation  $\mathcal{Y}$  sert à évoquer que ce processus joue le rôle d'une mesure martingale équivalente et non pas d'une richesse.

Nous rappelons les conditions que doivent satisfaire nécessairement les processus optimaux  $X^{x,u}$  et  $\mathcal{Y}_u(t, x)$  comme nous les avons établies au théorème 7.1 du paragraphe 7.3. Pour cela, nous commençons par définir un ensemble de propriétés auquel nous nous référerons souvent dans la suite ; sauf mention contraire, nous supposons que le marché de référence est "martingale", contraint par le cône convexe  $\mathcal{K}$ .

**Définition 8.2.** *Une famille de couples de semimartingales continues, indexées par un paramètre (de richesse)  $x > 0$ ,  $\{(X_t^x, \mathcal{Y}(t, x)); t \geq 0, x > 0\}$  est dite satisfaire les conditions  $(\mathcal{O}^*)$  dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , si :*

- (O1) *Pour tout  $x > 0$ , le processus  $(X_t^x; t \geq 0)$  est un portefeuille admissible, et donc une martingale locale.*
- (O2) *Pour tout  $x > 0$ , le processus  $(\mathcal{Y}(t, x); t \geq 0)$  est une martingale locale.*
- (O3) *Le processus  $(X_t^x \mathcal{Y}(t, x); t \geq 0)$  est une **martingale**.*

(O4) Pour toute stratégie admissible  $\pi$  et pour tout capital initial  $x'$ , le processus  $(X_t^{x',\pi}; t \geq 0)$  est une martingale locale positive, et pour tout  $(x, x') > 0$ , les processus  $(X_t^{x',\pi} \mathcal{Y}(t, x); t \geq 0)$  sont des surmartingales positives (des martingales locales si l'espace des contraintes  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel)

Nous notons  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des couples  $(X, \mathcal{Y})$  vérifiant les conditions  $(\mathcal{O}^*)$ .

Dans l'étude des utilités progressives faite dans les chapitres précédents, nous avons établi le lien entre ces processus et la fonction d'utilité :

**Proposition 8.1.** Soit  $X^{x,u}$  le processus optimal d'une utilité progressive  $u$  dans un marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ .

La dérivée de l'utilité progressive  $u$  le long de la trajectoire optimale est un processus  $\mathcal{Y}_u(t, x)$  défini par  $(u'(t, X_t^{x,u}))_{t \geq 0, x > 0} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{Y}_u(t, x))_{t \geq 0, x > 0}$ .

Le couple  $\{(X_t^{x,u}, \mathcal{Y}_u(t, x)); t \geq 0, x > 0\}$  vérifie les conditions  $(\mathcal{O}^*)$  (définition 8.2), qui sont donc des conditions nécessaires d'optimalité.

Par suite, un processus de richesse admissible  $X^x$  ne peut être le portefeuille optimal d'une utilité progressive que s'il existe un processus  $\mathcal{Y}(t, x)$  tel que le couple  $(X^{x,*}, \mathcal{Y}(\cdot, x))$  vérifie les propriétés  $(\mathcal{O}^*)$ .

**Remarque** Pour l'étude détaillée des deux familles de processus, voir l'étude du chapitre 5.

## 8.3 Approche par les flots stochastiques

Puisque nous connaissons plusieurs propriétés de la dérivée d'une utilité progressive le long de la trajectoire optimale (c-à-d.  $(u'(t, X_t^{x,u}))$ ) données dans la proposition 8.1, la question est la suivante : Pouvons nous obtenir plus d'information sur la dérivée en elle-même  $u'(t, x)$  à partir de ces propriétés ?

Bien que ceci puisse paraître un peu trop demander, car nous cherchons à caractériser la dérivée d'une utilité stochastique à partir de son comportement sur une trajectoire très particulière, la réponse à cette question est positive et simple, si le processus de richesse optimal est strictement croissant par rapport à sa condition initiale  $x$ .



Cela implique immédiatement que le processus  $\mathcal{Y}_u(t, x)$  défini par

$$\mathcal{Y}_u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} u'(t, X_t^{x,u})$$

est lui monotone décroissant par rapport à la richesse initiale  $x$ .

En notant par  $\mathcal{X}^u(t, z)$  l'inverse (par rapport à  $x$ ) de  $X_t^{x,u}$ , il est possible de retrouver  $u'(t, z)$  à partir de la martingale  $\mathcal{Y}_u(t, x)$  et du processus  $\mathcal{X}^u(t, z)$  à l'aide de la formule

$$u'(t, z) = \mathcal{Y}_u(t, \mathcal{X}^u(t, z)), \quad \forall t \geq 0, z > 0.$$

Cette identité est à la base de la construction que nous proposons dans ce chapitre.

### 8.3.1 Richesse optimale monotone

Cette hypothèse de monotonie de la richesse optimale est très naturelle car dans les résultats que nous avons établis dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2, la richesse optimale est strictement monotone et même deux fois différentiable par rapport au capital initial  $x$ , sous certaines hypothèses additionnelles. Ceci est encore vrai dans le cadre des utilités progressives décroissantes dans le temps, c'est-à-dire le cas d'une volatilité nulle dans un marché non martingale, étudiées dans le paragraphe 7.7 du chapitre précédent (voir l'équation (7.47) et la remarque 7.8). Nous pouvons aussi retrouver ces propriétés de la richesse optimale dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille, utilités puissance, logarithmiques et exponentielles et dans la multitude d'exemples proposés par Huyên Pham dans [94] et par Ioannis Karatzas et Steven Shreve dans [55].

Pour conclure, remarquons que dans un univers sans arbitrage *financière-ment* la richesse optimale ne peut être que croissante par rapport à la richesse initiale, car sinon en investissant moins d'argent on pourrait obtenir le même gain. Mathématiquement, des problèmes techniques peuvent apparaître, ce qui conduit à poser cette propriété comme une hypothèse.

**Hypothèse 8.1.** *Nous désignons par  $(X_t^*(x); t \geq 0)$  le processus de richesse admissible, qui est le processus optimal d'au moins une utilité progressive. En*

plus des conditions nécessaires, énoncées dans la proposition 8.1, nous supposons que :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad x \mapsto X_t^*(x) \quad \text{est continue strictement croissante,} \\ \text{et vérifie} \quad X_t^*(0) = 0 \quad X_t^*(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Les seuls processus  $\mathcal{Y}(t, x)$  tels que  $(X_t^*(x), \mathcal{Y}(t, x))$  vérifient les conditions d'optimalité  $\mathcal{O}^*$  définies en (8.2) vérifient également une hypothèse de monotonie, décroissante cette fois-ci,

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad x \mapsto \mathcal{Y}(t, x), \text{ est strictement décroissante, positive;} \\ \text{et vérifie les conditions d'Inada si} \quad \mathcal{Y}(t, 0) = +\infty, \quad \mathcal{Y}(t, \infty) = 0. \end{aligned}$$

### 8.3.2 La richesse optimale comme flot stochastique

L'hypothèse de stricte monotonie de la richesse  $(X_t^*(x))$  nous amène naturellement à la considérer comme la valeur partant à la date  $s$  d'un capital  $X_s^*(x)$  d'un flot stochastique  $(X_t^*(s, x))$ , que nous définissons ci-dessous. Nous pourrions ensuite considérer la richesse comme partant d'une richesse  $x$  à la date 0 ou partant d'une richesse  $z$  à la date  $s$ .

**Proposition 8.2.** *Soit un processus  $(X_t^*(x))$  strictement monotone par rapport à  $x$  à valeurs dans  $[0, \infty)$ . Son inverse  $\mathcal{X}(t, z) = (X_t^*(\cdot))^{-1}(z)$  est aussi un flot strictement monotone, défini sur  $[0, \infty)$ .*

*Nous prolongeons le flot  $X^*$  et le flot inverse  $\mathcal{X}$  aux dates intermédiaires ( $s < t$ ) de la manière suivante*

$$\begin{aligned} X_t^*(s, x) &= X_t^*(\mathcal{X}(s, x)) \\ \mathcal{X}_s(t, z) &= (X_t^*(s, \cdot))^{-1}(z) = X_s^*(\mathcal{X}(t, z)). \end{aligned} \tag{8.1}$$

*Les règles de composition des flots sont alors valables pour  $X_t^*(s, x)$  et  $\mathcal{X}_s(t, z)$ .*

- (i) *l'égalité  $X_t^*(s, x) = X_t^*(\alpha, X_\alpha^*(s, x))$  est vraie pour tout  $0 \leq \alpha \leq s \leq t$  p.s..  
l'égalité  $\mathcal{X}_s(t, z) = \mathcal{X}_s(\alpha, \mathcal{X}_\alpha(t, z))$  est vraie pour tout  $0 \leq s \leq \alpha \leq t$  p.s..*
- (ii) *On a toujours  $X_t^*(t, x) = x, \mathcal{X}_t(t, z) = z$ , et plus généralement  
 $\mathcal{X}_s(t, X_t^*(s, x)) = x, \quad X_t^*(s, \mathcal{X}_s(t, x)) = x$ , pour tout  $0 \leq s \leq t$ .*

Pour plus de détails ainsi que des propriétés plus précises, voir l'appendice A.6, et plus généralement le livre de Kunita [74], et les articles [67, 73, 72, 66, 71, 77] pour la théorie générale des flots stochastiques.

Par le même raisonnement du paragraphe 5.4.3 du chapitre 5, nous supposons dans toute la suite que l'hypothèse de recollement 5.3 est satisfaite, à savoir :

**Hypothèse 8.2.** *Pour toutes stratégies  $\pi^1$  admissible entre la date 0 et la date  $t_1$  et  $\pi^2$  admissible entre la date  $t_1$  et la date  $t_2$ , la stratégie  $\pi$  associée au vecteur de proportions  $\delta$  défini par  $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$  est une stratégie admissible sur l'intervalle  $[0, t_2]$  et ce quels que soient  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2$ .  $\delta^1$  et  $\delta^2$  désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies  $\pi^1$  et  $\pi^2$ .*

**Remarque 8.1.** *Il est important de noter que la stratégie  $\pi$  dans cette hypothèse est différente de la stratégie d'investissement  $\hat{\pi} = \pi^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \pi^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$ , car ceci dépend du niveau de la richesse à la date  $t_1$ .*

Cette hypothèse nous permet essentiellement de déduire que les richesses à l'instant  $t$ , partant de  $x$  à une date intermédiaire  $s$  et notées par  $(X_t^\pi(s, x))_{t \geq s}$  sont admissibles, en particulier la richesse  $(X_t^*(s, x))_{t \geq s}$ . En effet, il suffit de prendre la richesse  $\mathcal{X}(s, x)$  comme richesse initiale, de suivre la stratégie  $\pi^1$  jusqu'à la date  $s$ , puis à partir de cette date  $s$ , à la quelle nous observons une richesse  $x$ , de considérer la stratégie  $\pi$ . Ce qui est équivalent à l'identité

$$X_t^{\hat{\pi}}(\mathcal{X}(s, x)) = X_t^\pi(s, X_s^*(\mathcal{X}(s, x))) = X_t^\pi(s, x).$$

## 8.4 Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

### 8.4.1 Existence d'une utilité progressive pour un portefeuille optimal donné

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, notre objectif est de construire les utilités progressives de portefeuille optimal donné, sur le marché financier martingale où les portefeuilles sont contraints par  $\mathcal{K}$ , sous

#### 8.4. Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

l'hypothèse de richesse  $X^*$  strictement monotone. L'étude précédente montre que si la richesse optimale est une martingale, (et non seulement une martingale locale), la mesure martingale  $\mathcal{Y}(t, x)/\mathcal{Y}(0, x) = 1$  est admissible au sens où le couple  $(X^*, \mathcal{Y}(0, x))$  vérifie les conditions  $\mathcal{O}^*$  de la définition 8.2. Choisissons la condition initiale de  $\mathcal{Y}(0, x) = u'_0(x)$  comme la dérivée d'une fonction concave, vérifiant les conditions d'Inada. La remarque 8.1 suggère une forme très simple pour associer une utilité progressive  $u(t, x)$  de portefeuille optimal monotone donné. Si  $\mathcal{X}(t, z)$  est l'inverse du flot  $X_t^*(x)$ , le processus croissant  $u(t, x)$ , valant 0 en 0, de dérivée

$$u'(t, x) = u'_0(\mathcal{X}(t, x))$$

est un bon candidat pour être une utilité progressive, puisque, étant donnée la monotonie du flot  $\mathcal{X}(t, x)$ , la fonction  $u'(t, x)$  reproduit les propriétés de monotonie et de signe de la fonction  $u'_0(x)$ . Une autre propriété remarquable de ce champ aléatoire est que  $u'(t, X_t^*(x)) = u'_0(x)$ , ce qui est une autre manière d'exprimer que la mesure martingale optimale est constante. Nous sommes alors en mesure d'énoncer l'un des résultats importants de cette section.

**Théorème 8.1.** *Soit  $X_t^*(x)$  un processus de portefeuille admissible, monotone par rapport à la condition initiale, et **martingale**. Désignons par  $\mathcal{X}(t, z)$  le flot inverse associé.*

*Pour toute fonction d'utilité  $u_0$  telle que  $u'_0(\mathcal{X}(t, z))$  soit intégrable au voisinage de  $z = 0$ , le processus stochastique*

$$u(t, x) = \int_0^x u'_0(\mathcal{X}(t, z)) dz, \quad u(t, 0) = 0 \tag{8.2}$$

*est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale constante comme mesure martingale optimale.*

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes. La première consiste à montrer que si le processus d'utilité considéré tout au long de la stratégie optimale est une martingale, alors le processus  $X^*$  est optimal, ou ce qui est équivalent, l'utilité conditionnelle de n'importe quel portefeuille admissible, de richesse optimale à une date intermédiaire égale à  $x$  est plus faible que celle de  $X^*$ . La seconde étape est alors de montrer que le processus  $u(t, X_t^*(x))$  est une martingale.

*Démonstration.* de l'optimalité de  $X^*$ , si  $u(t, X_t^*(x))$  est une martingale locale. Pour montrer ce résultat, nous nous appuyons sur les flots stochastiques générés par le processus de richesse optimal et son inverse comme dans la section précédente 8.3.2. En effet pour comparer les utilités conditionnelles, vues de la date  $s$ , nous nous limitons aux portefeuilles dont la richesse à la date  $s$  est la même et vaut  $x$ . Du point de vue du portefeuille admissible  $X^*$ , cela revient à travailler pour  $s \leq t$  avec le flot  $X_t^*(s, x)$ , et son inverse  $\mathcal{X}_s(t, z)$ .

Considérons un processus de richesse admissible,  $(X_t^\pi(s, x); s \leq t)$ , de richesse initiale à la date  $s$  égale à  $x$ . Par concavité de  $u(t, x)$ , nous avons les inégalités trajectorielles suivantes,

$$u(t, X_t^\pi(s, x)) - u(t, X_t^*(s, x)) \leq (X_t^\pi(s, x) - X_t^*(s, x))u'(t, X_t^*(s, x)).$$

D'après les propriétés de la proposition 8.2 du flot stochastique  $X_t^*(s, x)$  et de son inverse  $\mathcal{X}_s(t, z)$ , nous voyons sans peine que comme pour la date initiale 0, pour la date  $s$  prise comme nouvelle date de départ,  $u'(t, X_t^*(s, x)) = u'(s, x)$ . Revenons au membre de droite de l'inégalité, qui est transformé en  $(X_t^\pi(s, x) - X_t^*(s, x))u'(s, x)$ . Puisque le portefeuille  $X_t^\pi$  est admissible dans un marché martingale, le processus  $X_t^\pi(s, x)$  est une surmartingale, d'espérance conditionnelle vue de  $s$  inférieure à  $x$ . D'autre part, le processus  $X_t^*(s, x)$  est par hypothèse une vraie martingale. Par suite, l'espérance conditionnelle du membre de droite est négatif. On en déduit que celle du membre de gauche l'est aussi, et donc

$$\mathbb{E}(u(t, X_t^\pi(s, x))/\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(u(t, X_t^*(s, x))/\mathcal{F}_s) \leq u(s, x)$$

si nous utilisons le fait que nous montrerons ci-dessous que  $u(t, X_t^*(s, x))$  est une martingale locale, et donc une surmartingale positive.  $\square$

La deuxième étape qui a un intérêt pour elle-même est énoncée sous forme de lemme.

**Lemme 8.1.** *Pour tout  $s \geq 0$  le processus  $(u(t, X_t^*(s, x)))_{t \geq s}$  est une martingale. En particulier elle est donnée par*

$$u(t, X_t^*(s, x)) = \int_0^{\mathcal{X}^{(s, x)}} u'_0(z) d_z X_t^*(z) = u'(s, x)X_t^*(s, x) - \int_0^{\mathcal{X}^{(s, x)}} X_t^*(z) du'_0(z).$$

#### 8.4. Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

*Démonstration.* Par définition,

$$u(t, X_t^*(s, x)) = \int_0^{X_t^*(s, x)} u'_0(\mathcal{X}(t, z)) dz$$

Dans la suite, nous notons  $\tilde{u}'_0(y) = (u'_0)^{-1}(y)$ , et rappelons que d'après les conditions d'Inada  $u'_0(0) = +\infty$ .

Faisons ensuite le changement de variable croissant  $z' = \mathcal{X}(t, z)$ , qui est équivalent à  $z = X_t^*(z')$ , ceci donne

$$u(t, X_t^*(s, x)) = \int_0^{\mathcal{X}(s, x)} u'_0(z) d_z X_t^*(z)$$

La notation  $d_z X^*$  est utilisée pour rappeler que nous considérons une différentielle en  $z$ .

Il s'ensuit que par une simple intégration par parties,

$$u(t, X_t^*(s, x)) = u'(s, x) X_t^*(s, x) - \int_0^{\mathcal{X}(s, x)} X_t^*(z) du'_0(z).$$

Comme  $(X_t^*(s, x))_{t \geq s}$  est une "vraie" martingale et comme la borne supérieure de l'intégrale  $\mathcal{X}(s, x)$  peut être considérée comme une constante ( $s \leq t$ ), d'après le théorème de Fubini-Tonelli, l'intégrale en  $z$  de  $(X_t^*(z), t \geq s)$  par rapport à  $du'_0(z)$  est encore une martingale. Par conséquent  $(u(t, X_t^*(s, x)))_{t \geq s}$  étant la différence de deux martingales est une martingale.  $\square$

#### 8.4.2 Construction de toutes les utilités progressives de portefeuille optimal donné

Nous avons montré dans le théorème 8.1 que pour toute richesse optimale monotone  $X^*$ , si  $X^*$  est une vraie martingale, nous pouvons construire au moins une utilité progressive de richesse optimale  $X^*$  et de mesure martingale optimale constante.

Nous nous posons maintenant la question de déterminer les utilités progressives associées à des mesures martingales plus générales  $\mathcal{Y}$  telles que les conditions d'optimalité  $\mathcal{O}^*$  soient satisfaites pour le couple  $(X^*, \mathcal{Y})$ . Comme nous l'avons vu, l'intuition est de rechercher  $u$  sous la forme  $u'(t, x) = \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, x)$ , où  $\mathcal{X}(t, x)$  est le flot inverse de  $X^*$ . La condition de monotonie de  $X^*$  entraîne que le flot

$\mathcal{Y}$  doit être monotone décroissant pour garantir que  $u'(t, x)$  est décroissant. En résumé, rappelons les hypothèses que doivent satisfaire le couple  $(X^*, \mathcal{Y})$  dans un marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ .

- (M1) Les champs aléatoires  $(X_t^*(x); x \geq 0, t \geq 0)$  et  $(\mathcal{Y}(t, x); x \geq 0, t \geq 0)$  sont strictement monotones :  $X_t^*(x)$  est croissant de 0 à  $+\infty$ , alors que  $\mathcal{Y}(t, x)$  est décroissant de  $+\infty$  à 0, de sorte que les conditions d'Inada sont satisfaites.  $\mathcal{Y}(0, x)$  est une fonction décroissante, notée  $u'_0(x)$ . On suppose de plus que  $\mathcal{Y}(t, x)$  est intégrable en  $x$ , au voisinage de  $x = 0$ .
- (O1) Pour tout  $x$ ,  $(X_t^*(x))_{t \geq 0}$  est un portefeuille de richesse admissible, et donc une martingale locale. De même, le processus  $(\mathcal{Y}(t, x))_{t \geq 0}$  est une martingale locale positive
- (O2) Pour tout  $x > 0$ , le processus  $(X_t^{x,*} \mathcal{Y}(t, x))_{t \geq 0}$  est une "vraie" martingale.
- (O3) Pour toute stratégie admissible  $\pi$  et pour tout capital initial  $x$  et  $x'$ , le processus  $(X_t^\pi(x') \mathcal{Y}(t, x))_{t \geq 0}$  est une surmartingale positive, (une martingale locale dans le cas où l'espace des contraintes  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel.)

Lorsque les contraintes sont décrites par un espace vectoriel, la condition (O3) implique que la martingale locale  $\mathcal{Y}(t, x)_{t \geq 0}$  est orthogonale aux processus de richesse admissibles  $X_t^\pi(x')$  pour tout  $\pi \in \mathcal{K}$ . Ceci implique que sa volatilité est dans l'espace  $(\mathcal{K})^\perp$  orthogonal de  $\mathcal{K}$ .

Une des conséquences de cette propriété est que la propriété de martingale du processus de richesse  $(X_t^*(x) \mathcal{Y}(t, x))_{t \geq 0, x > 0}$  s'étend à la dérivée (si elle existe) du processus  $X^*$  par rapport à  $x$ . Pour justifier le passage à la limite induit par la dérivation, nous sommes amenés à supposer une hypothèse de "domination" sur le processus de richesse optimal. Remarquons que cette hypothèse n'est introduite que pour justifier le résultat de la proposition 8.3, qui suit.

**Hypothèse 8.3.** *H1 local) Pour tout  $x$ , il existe un processus adapté positif et intégrable,  $U_t(x) > 0$  tel que si  $\mathbf{B}(x, \alpha)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $\alpha$*

$$\forall y, y' \in \mathbf{B}(x, \alpha), |X_t^*(y) - X_t^*(y')| < |y - y'| U_t(x), \quad t \geq 0. \quad (8.3)$$

#### 8.4. Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

---

*H2 global) On suppose de plus que  $U_t(x)$  est croissant par rapport à  $x$  et que  $U_t^I(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, z) U_t(z) dz$  est une variable intégrable pour tout  $t \geq 0$ .*

Sous cette hypothèse, nous avons le résultat suivant qui nous sera d'une grande utilité pour la suite.

**Proposition 8.3.** *Supposons l'hypothèse 8.3. Si la dérivée par rapport à  $x$  du processus croissant  $X_t^*(x)$ , notée  $D_x X_t^*(x)$  existe en tout point  $x$ , alors  $\mathcal{Y}(t, x) D_x X_t^*(x)$  est une martingale.*

*Plus généralement, sans hypothèse de dérivabilité, il en est de même du processus*

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t, z) d_z X_t^*(z). \quad (8.4)$$

**Remarque 8.2.** *Nous montrons dans la preuve du théorème 8.2, que la quantité*

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t, z) d_z X_t^*(z).$$

*n'est autre que  $u(t, X_t^*(x))$  où  $u$  est un processus que nous définissons dans la suite. En particulier, cette proposition n'est autre qu'une généralisation du lemme 8.1 où nous remplaçons la quantité déterministe  $u'_0$  par le processus  $\mathcal{Y}$ .*

*Démonstration.* a) Nous commençons par supposer  $X_t^*(x)$  dérivable en  $x$ . Pour  $0 < \epsilon < \alpha$ , le processus  $\mathcal{Y}(t, x)(X_t^*(x + \epsilon) - X_t^*(x))$  est une surmartingale positive, et donc d'après l'hypothèse 8.3 il en est de même de sa dérivée à droite en  $\epsilon$ , soit  $\mathcal{Y}(t, x) D_x^+ X_t^*(x)$  est une surmartingale positive.

Le même raisonnement fait en regardant la dérivée à gauche montre que

$$\mathcal{Y}(t, x)(X_t^*(x) - X_t^*(x - \epsilon))$$

est une martingale locale positive dans le cas des contraintes de type espace vectoriel. L'hypothèse 8.3 implique que cette martingale locale est une vraie martingale, et que la propriété passe à la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0. Comme le processus est supposé dérivable, nous avons établi la propriété recherchée.

Dans le cas des contraintes de type cône,  $\mathcal{Y}(t, x)(X_t^*(x) - X_t^*(x - \epsilon))$  est une sous-martingale positive. L'hypothèse 8.3 est utilisée pour montrer que l'on peut



encore passer à la limite et déduire que  $\mathcal{Y}(t, x)D_x^-X_t^*(x)$  est une sousmartingale positive. Comme par l'hypothèse de dérivabilité faite sur  $X^*$ ,  $D_x^-X_t^*(x) = D_x^+X_t^*(x) = D_xX_t^*(x)$ , le processus positif  $\mathcal{Y}(t, x)D_xX_t^*(x)$  est une sous et surmartingale donc une martingale.

b) Dans le cas général, nous utilisons les sommes de Darboux pour étudier les propriétés de l'intégrale  $S(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, z)d_zX_t^*(z)$ . Nous faisons donc une subdivision de  $[0, x]$  en intervalles  $]z_n, z_{n+1}]$ , dont le pas tend vers 0. Nous considérons les deux suites d'approximation par au-dessous ou par au-dessus,

$$\begin{aligned} S_N(t, x) &= \sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t, z_n)(X_t^*(z_{n+1}) - X_t^*(z_n)) \\ S'_N(t, x) &= \sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t, z_{n+1})(X_t^*(z_{n+1}) - X_t^*(z_n)). \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que ci-dessus, la suite  $S_N(t, x)$  est une surmartingale positive, alors que la suite  $S'_N(t, x)$  est une sous-martingale positive, et une martingale locale positive si les contraintes forment un espace vectoriel.

Dans tous les cas, grâce à l'hypothèse 8.3, les processus positifs  $S_N(t, x)$  et  $S'_N(t, x)$  sont majorés par

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t, z_{n+1})U_t(z_{n+1})$$

et donc sous l'hypothèse 8.3 global, ces sommes sont majorées par  $U_t^I(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, z)U_t(z)dz$ . Par suite, les propriétés de sous et surmartingale passent à la limite et donc

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t, z)d_zX_t^*(x)$$

est une martingale. □

Nous avons maintenant tous les éléments pour construire des utilités progressives de portefeuille optimal donné.

**Théorème 8.2.** *Soit un marché martingale, d'espace de contraintes  $\mathcal{K}$ . Nous nous donnons :*

#### 8.4. Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

---

- un processus de richesse admissible  $(X_t^*(x)); x > 0$ , qui est une martingale locale strictement monotone par rapport à  $x$ , dont le processus inverse est désigné par  $\mathcal{X}(t, x)$ .
- une famille  $(\mathcal{Y}(t, x)); x \geq 0$  de martingales locales strictement positives, strictement décroissantes par rapport à  $x$  satisfaisant les conditions d'Inada,  $\mathcal{Y}(t, 0) = +\infty$ ,  $\mathcal{Y}(t, +\infty) = 0$ , et telles que  $\mathcal{Y}(t, x)$  soit intégrable au voisinage de  $x = 0$ . En particulier, la condition initiale  $\mathcal{Y}(0, x) = u'_0(x)$  est une fonction décroissante satisfaisant les conditions d'Inada.
- On suppose que le couple satisfait les conditions nécessaires d'optimalité rappelées en 8.4.2, qui impliquent notamment que la volatilité du processus  $\mathcal{Y}(t, x)$  appartiennent au cône orthogonal de l'espace des contraintes.
- Les processus  $(\mathcal{Y}(t, x)X_t^*(x)); x > 0$  sont des vraies martingales.

Définissons un processus d'utilité stochastique, concave et croissante, par

$$u(t, x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t, z)) dz. \quad (8.5)$$

Sous l'hypothèse 8.3,  $u(t, x)$  est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , de condition initiale  $u_0$  admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale locale  $\mathcal{Y}(t, x)/\mathcal{Y}(0, x)$  comme mesure martingale optimale.

Dans le premier exemple, pour une utilité initiale donnée, nous construisons une utilité progressive de portefeuille optimal donné. L'extension que nous donnons ici, qui à des points techniques près, caractérise toutes les utilités progressives équivalentes à la précédente, exprime seulement comment on doit diffuser la fonction  $u'_0(x)$  pour rester dans le cadre des utilités progressives. La réponse est intuitive puisqu'elle exprime qu'il suffit de garder un champ monotone décroissant de martingales qui n'influent pas sur le marché de référence.

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes, comme dans la construction de la section précédente. La cohérence avec l'univers d'investissement repose sur deux propriétés essentielles :

- d'une part sur le fait que  $u'(t, X_t^*(x)) = \mathcal{Y}(t, x)$  et donc que pour tout portefeuille admissible,  $X_t^\pi(x)u'(t, X_t^*(x))$  est une surmartingale,
- d'autre part que le processus  $X_t^*(x)u'(t, X_t^*(x))$  est une "vraie" martingale,

– et enfin sur le fait que  $u(t, X_t^*(x))$  est une martingale.

Il n'y a pas de modification à apporter à la preuve du théorème 8.1, pour montrer que la compatibilité avec l'univers d'investissement est automatique si nous montrons  $u(t, X_t^*(x))$  est une martingale.

Pour se faire, nous procédons comme dans l'exemple précédent en écrivant que  $u(t, X_t^*(x)) = \int_0^{X_t^{x,\pi}} \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, z') dz' = \int_0^\infty \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, z') \mathbb{1}_{\{0 \leq z' \leq X_t^*(x)\}} dz'$ .

Faisons le changement de variable un peu différent  $\mathcal{X}(t, z') = z$ , ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} u(t, X_t^*(x)) &= \int_0^\infty \mathcal{Y}(t, z) \mathbb{1}_{\{0 \leq X^*(t, z) \leq X_t^*(x)\}} d_z(X^*(t, z)) \\ &= \int_0^x \mathcal{Y}(t, z) d_z(X^*(t, z)) \end{aligned}$$

puisque par stricte monotonie de  $X_t^*(x)$ ,

$$X^*(t, z) \leq X_t^*(x) \iff z \leq x.$$

Puisque nous avons montré dans la proposition 8.3 que

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t, z) d_z(X^*(t, z))$$

est une vraie martingale, il en est de même du processus  $u(t, X_t^*(x))$ .  $\square$

## 8.5 Dual progressif

En termes de dual convexe d'utilité progressive, les résultats des paragraphes précédents peuvent s'énoncer sous la formulation duale suivante :

**Théorème 8.3.** *Soit  $X_t^*(x)$  un processus de portefeuille admissible, monotone par rapport à la condition initiale, et **martingale**. Pour toute fonction d'utilité  $u_0$  dont le dual convexe est noté  $\tilde{u}_0$ , le processus stochastique  $\tilde{u}$  défini par*

$$\tilde{u}(t, y) = \int_y^{+\infty} X_t^*(\tilde{u}'_0(z)) dz, \quad (8.6)$$

*est le dual convexe d'une utilité progressive  $u$  dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale constante*

## 8.6. Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire

comme mesure martingale optimale. En particulier, sa dérivée n'est qu'une simple transformation de la richesse  $X^*$ , donnée par

$$\tilde{u}'(t, y) = -X_t^*(\tilde{u}'_0(y)) \quad (8.7)$$

Sinon dans un cadre plus général :

**Théorème 8.4.** *Soit un marché martingale, d'espace de contraintes  $\mathcal{K}$ . Nous nous donnons :*

- *un processus de richesse admissible  $(X_t^*(x)); x > 0$ , qui est une martingale locale strictement monotone par rapport à  $x$ .*
  - *une famille  $(\mathcal{Y}(t, x)); x \geq 0$  de martingales locales strictement positives, strictement décroissante par rapport à  $x$  satisfaisant les conditions d'Inada,  $\mathcal{Y}(t, 0) = +\infty$ ,  $\mathcal{Y}(t, +\infty) = 0$ , et telles que  $\mathcal{Y}(t, x)$  soit intégrable au voisinage de  $x = 0$ . En particulier, la condition initiale  $\mathcal{Y}(0, x) = u'_0(x)$  est une fonction décroissante satisfaisant les conditions d'Inada.*
  - *On suppose que le couple satisfait les conditions nécessaires d'optimalité rappelées en 8.4.2, qui impliquent notamment que la volatilité du processus  $\mathcal{Y}(t, x)$  appartiennent au cône orthogonal de l'espace des contraintes.*
  - *Les processus  $(\mathcal{Y}(t, x)X_t^*(x); x > 0)$  sont des vraies martingales.*
- Définissons le processus stochastique  $\tilde{u}$  par*

$$\tilde{u}(t, y) = \int_y^{+\infty} X_t^*((\mathcal{Y})^{-1}(t, z)) dz. \quad (8.8)$$

*Sous l'hypothèse 8.3,  $\tilde{u}(t, y)$  est le dual convexe d'une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale locale  $\mathcal{Y}(t, x)/\mathcal{Y}(0, x)$  comme mesure martingale optimale.*

*En particulier,*

$$\tilde{u}'(t, y) = -X_t^*((\mathcal{Y})^{-1}(t, y)). \quad (8.9)$$

## 8.6 Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire

L'idée de ce paragraphe est de construire, à partir d'utilités progressives simples indexées par un paramètre  $\alpha$ , une utilité progressive plus générale et ce

en raisonnant uniquement en termes de richesses optimales et en considérant des tirages aléatoires du paramètre  $\alpha$ . Les utilités puissances, dans ce qui suit, sont des exemples concrets pour illustrer la méthode proposée.

### 8.6.1 Utilités progressives de type puissances et richesses optimales

Nous avons vu dans le chapitre 4 de ce manuscrit, que les utilités progressives de type puissance sont de la forme

$$u_\alpha(t, x) = Z_t^\alpha \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (8.10)$$

où  $Z$  est un processus strictement positif de la forme,

$$\frac{dZ_t^\alpha}{Z_t^\alpha} = -\frac{1-\alpha}{2\alpha} \left\| \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} (\gamma_t) \right\|^2 dt + \gamma_t dW_t, \quad Z_0 = 1.$$

Comme la partie orthogonale de  $Z^\alpha$  n'a aucune influence sur les portefeuilles, nous supposons que  $\gamma_t \in \mathcal{K}_t \sigma_t$ ,  $t \geq 0$  pour simplifier l'approche.

La richesse optimale  $X^{*,\alpha}$  donnée par

$$X_t^{*,\alpha}(x) = x X_t^{*,\alpha}(1) = x e^{\frac{1}{\alpha} \int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds} \quad (8.11)$$

est une vraie martingale, linéaire par rapport à sa condition initiale  $x$ .

La mesure martingale optimale  $\mathcal{Y}^\alpha$  associée est constant, donnée par

$$\mathcal{Y}^\alpha(t, x) = u'_\alpha(t, X_t^{*,\alpha}(x)) = x^{-\alpha}.$$

### 8.6.2 Aversion au risque aléatoire et portefeuille optimal

À ce stade le coefficient  $\alpha$ , qui joue le rôle de l'aversion au risque relative, était supposé constant, il s'agit du cas le plus simple des utilités puissances progressives. Mais il est tout à fait concevable que l'aversion au risque d'une utilité progressive est en général aléatoire. En effet, nous pouvons imaginer, à la date  $t = 0$ , que l'investisseur tire au hasard la valeur de ce coefficient. À chaque réalisation  $\alpha$  il associe :

- un poids  $\nu(\alpha)$  ( $\nu$  est une mesure positive finie),

### 8.6. Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire

- une proportion  $x_\alpha(x)$  de sa richesse initiale (strictement croissante en  $x$ ,  $x_\alpha(x) \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow \infty$ ) qu'il va investir sur le marché financier en considérant  $u_\alpha$  comme utilité, il réalisera ainsi  $X^{*,\alpha}(x_\alpha(x))$  comme richesse (associée à ce tirage).

Sa richesse finale, par conséquent, est la somme pondérée par  $\nu$  de toutes ses richesses  $X^{*,\alpha}(x_\alpha(x)) = x_\alpha(x)X^{*,\alpha}(1)$ , c-à-d.

$$\begin{cases} X_t^*(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) X_t^{*,\alpha}(1) \nu(d\alpha) \\ x = \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) \nu(d\alpha). \end{cases} \quad (8.12)$$

De manière analogue, en raisonnant par dualité, nous définissons le processus  $\mathcal{Y}$  par

$$\mathcal{Y}(t, x) = \mathcal{Y}(0, x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} (x_\alpha(x))^{-\alpha} d\nu(\alpha) \quad (8.13)$$

que nous supposons **bien défini et intégrable au voisinage de 0**. Dans la suite, nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**Hypothèse 8.4.** *Supposons qu'il existe un intervalle  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{R}_+^*$  tel que la volatilité  $\gamma$  de  $Z$  satisfait*

$$\mathbb{E}(e^{k \int_0^t \Pi_{\mathcal{K}_s \sigma_s}(\gamma_s) dW_s - \frac{k^2}{2} \int_0^t \|\Pi_{\mathcal{K}_s \sigma_s}(\gamma_s)\|^2 ds}) = 1, \quad \forall k \in \mathcal{I}, t \geq 0$$

nous montrons alors le résultat suivant :

**Proposition 8.4.** *Supposons que l'hypothèse 8.4 est satisfaite. Alors si la mesure  $\nu$  est à support dans  $\mathcal{I}$ , le processus  $X^*$  est une richesse **admissible** strictement croissante en  $x$  et une vraie **martingale**.*

*Démonstration.* En effet, par définition  $X^*$  est une martingale locale positive, dont la volatilité est donnée par

$$\left[ \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) X_t^{*,\alpha}(1) \frac{\nu(d\alpha)}{\alpha} \right] \gamma_t.$$

Puisque le terme  $\left[ \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) X_t^{*,\alpha}(1) \frac{\nu(d\alpha)}{\alpha} \right]$  est strictement positif,  $\gamma \in \mathcal{K}\sigma$  et les contraintes sont de types cônes (stable par multiplication positive), la stratégie

ci-dessus est bien dans l'ensemble des contraintes, de plus  $X^*$ , ci-dessus, est positive et ce par définition c'est donc une richesse admissible.  $X^*$  est strictement croissante en  $x$  est une simple conséquence de la stricte croissance des proportions  $x_\alpha(\cdot)$  et le fait que  $X^{*,\alpha}(1)$  est indépendant de  $x$ .

Le fait que  $X^*$  défini ci-dessus est une vraie martingale est une simple conséquence de l'hypothèse 8.4 et du théorème de Fubini.

□

Les hypothèses du théorème 8.1 sont alors satisfaites, nous déduisons d'après ce théorème, sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, que pour toute fonction d'utilité  $u_0$ , telles que  $u'_0(\mathcal{X}(t, x))$  est intégrable au voisinage de 0, le processus stochastique  $u$  défini par

$$\begin{cases} u(t, x) = \int_0^x u'_0(\mathcal{X}(t, z)) dz \\ u(t, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.14)$$

est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par  $\mathcal{K}$ , admettant  $X^*$  comme processus optimal, et la martingale constante comme mesure martingale optimale.

### Cas particulier : utilités progressives décroissantes

Par contre il existe une fonction d'utilité  $u_0$  très particulière. Cette fonction n'est autre que  $\mathcal{Y}(0, x)$  définie dans (8.13), en termes de dual convexe de l'utilité progressive  $u$  associée à cette condition initiale, nous savons d'après le théorème 8.3, que  $\tilde{u}$  est donnée par

$$\tilde{u}(t, y) = \int_y^{+\infty} X_t^*(\mathcal{Y}^{-1}(0, z)) dz = \int_{\mathbb{R}_+^*} \left( \int_y^{+\infty} x_\alpha(\mathcal{Y}^{-1}) dz \right) X_t^{*,\alpha}(1) d\nu(\alpha)$$

où

$$\mathcal{Y}^{-1}(0, x) \text{ désigne l'inverse en } x \text{ de } \mathcal{Y}(0, x).$$

Si de plus nous choisissons les fonctions  $x_\alpha$  telles que

$$x_\alpha(x) = (\mathcal{Y}(0, x))^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Cette dernière identité devient, après intégration en  $z$ ,

$$\tilde{u}(t, y) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} (1 - y^{1-\frac{1}{\alpha}} X_t^{*,\alpha}(1)) d\nu(\alpha)$$

ce qui n'est autre que la représentation, dans le marché martingale, des **utilités progressives décroissantes dans le temps**, que nous avons abordées à la fin du chapitre précédent au paragraphe 7.7. Ces utilités ont été étudiées essentiellement par Zariphopoulou et al. [88] et par M. Tehranchi et al. [36]. Dans [88], M. Musiela et T. Zariphopoulou ont développé plusieurs exemples avec des mesures  $\nu$  particulières ainsi que les propriétés de la richesse optimale.

### Quelques remarques

Dans la construction ci-dessus, la famille  $\{X^{*,\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$  constitue la famille de richesses optimales associées à des utilités progressives  $\{u_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$  de type puissance données par (8.10). Il est important de noter, ensuite, que le processus de construction que nous avons proposé dans ce paragraphe se généralise facilement et n'est pas spécifique aux utilités puissances. En effet, nous pouvons considérer une famille quelconque de richesses  $\{X^{*,\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$  indexée par un paramètre  $\alpha$ , associée à des utilités progressives qui ne sont pas forcément du même type. Ainsi par le même raisonnement il est facile de construire la richesse  $X^*$ . Par contre, nous notons le fait que les  $X^{*,\alpha}$  sont toutes des martingales à joué un rôle fondamental pour satisfaire les conditions d'optimalité. Cette propriété, dans un cas plus général, peut alors être remplacée par  $X^{*,\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$  sont des martingales sous la même probabilité  $\mathbb{Q}$ .

NB : Le point clé de cette section est de raisonner directement en termes de richesse optimale et non pas en termes d'utilité progressive. Et ce pour la simple raison que la somme de deux utilités progressives n'est pas une utilité progressive, sauf dans le cas très particulier où les deux richesses optimales et les deux mesures martingales (locales) optimales sont identiques. Par contre la somme de deux richesses admissibles est toujours une richesse admissible.

## 8.7 Flots et EDP stochastiques

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié les utilités progressives de portefeuille optimal monotone donné par des méthodes de changement de variables et d'analyse convexe, ce qui permet notamment de faire des hypothèses minimales.



Il est naturel d'essayer d'étudier les propriétés de ces utilités progressives, définies comme composées de flots stochastiques (8.5), notamment leur volatilité, par des méthodes de calcul stochastique, qui exigeront bien sûr plus de régularité sur les flots qui interviennent. Les outils sont la formule d'Itô-Ventzel 5.1 appliquée au flot stochastique composé  $\mathcal{Y} \circ \mathcal{X}$ , qui demande des propriétés de régularité telles que nous avons rappelées dans le paragraphe 5.4.1.

Nous commençons par établir une formule de composition des flots dans un résultat préliminaire. Une formule qui nous sera d'une grande utilité pour démontrer le résultat principal de cette section et faire le lien avec les résultats des chapitres précédents, notamment la dynamique (6.40) satisfaite par les utilités progressives dans un marché où les richesses sont des martingales locales.

### 8.7.1 Formule d'Itô pour les flots stochastiques et flots inverses

Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux flots stochastiques, unidimensionnels, dont les dynamiques sont les suivantes,

$$\begin{aligned} d\phi(t, x) &= \mu(t, x)dt + \gamma(t, x)dW_t, \\ d\psi(t, x) &= \alpha(t, x)dt + \nu(t, x)dW_t. \end{aligned}$$

Le but de ce paragraphe est d'établir, sous les bonnes hypothèses, la dynamique du flot composé  $\phi \circ \psi$  dans un premier temps, puis d'établir, si  $\phi$  est inversible, la dynamique de son inverse que nous noterons  $\xi$ .

Pour cela, toujours d'après la théorie des flots stochastiques développée en particulier dans le livre de H. Kunita [74] et rappelée en Appendice A.6, nous faisons les hypothèses permettant d'appliquer le lemme d'Itô-Ventzel et nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 8.5.** <sup>1</sup> *Supposons que les flots  $\phi$  et  $\psi$  sont tels que  $\phi(t, x)$  un  $\mathcal{C}^2$ -processus et une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale tel que ses caractéristiques locales  $(\mu, \gamma)$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{1,0}$  et  $\psi(t, x)$  est une semimartingale continue à valeurs dans*

---

<sup>1</sup>Les définitions des classes  $\mathcal{B}^{m,\delta}$ ,  $\mathcal{C}^m$ -processus et  $\mathcal{C}^{m'}$  semimartingales sont fournies dans les sections A.2 et A.11.

$\mathcal{I}$  le domaine de  $\phi$ . Alors le flot composé  $\phi \circ \psi(t, x)$  est une semimartingale continue obéissant à la dynamique

$$\begin{aligned} d(\phi \circ \psi)(t, x) &= \mu(t, \psi(t, x))dt + \gamma(t, \psi(t, x))dW_t \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \psi(t, x))d\psi(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, \psi(t, x))\|\nu\|^2(t, x)dt \\ &+ \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, \psi(t, x)), \nu(t, x) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (8.15)$$

La volatilité du flot composé est donnée par

$$\sigma_t^{\phi \circ \psi} = \gamma(t, \psi(t, x)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \psi(t, x))\nu(t, x).$$

Nous particularisons maintenant la formule au cas des flots et de leurs inverses. Partant d'un flot  $\phi$  de coefficients  $(\mu, \gamma)$ , vérifiant les hypothèses du théorème 8.5, nous notons  $\xi(t, y)$  son inverse, et ses coefficients  $(\alpha^\xi, \nu^\xi)$ .

**Lemme 8.2.** *Si en plus des hypothèses du théorème 8.5, le flot stochastique  $\phi$  est inversible par rapport à sa condition initiale, alors son inverse  $\xi(t, y)$  est deux fois différentiable et obéit à la dynamique suivante,*

$$\begin{cases} d\xi(t, y) = \nu^\xi(t, y)dW_t + \left( \frac{1}{2} \partial_y \left( \frac{\|\nu^\xi\|^2}{\xi'(t, y)} \right)(t, y) - \mu(t, \xi(t, y))\xi'(t, y) \right) dt \\ \nu^\xi(t, y) = -\xi'(t, y)\gamma(t, \xi(t, y)) \end{cases} \quad (8.16)$$

où  $\xi'$  et  $\xi''$  désignent respectivement la dérivée première et seconde par rapport à  $y$  de  $\xi$ .

Établir la dynamique du flot inverse  $\xi$  n'est pas un résultat nouveau dans la théorie des flots stochastiques, (Théorème 4.2.10 page 131 de [74]). Par contre, ce qui est vraiment nouveau dans ce lemme, est de remarquer que la dynamique de  $\xi$  peut s'écrire sous la forme très particulière (8.16). La similarité entre cette forme et celle de la dynamique (6.40) d'une utilité progressive est un argument clé de la suite.

*Démonstration.* La preuve est essentiellement basée sur la formule d'Itô généralisée établie au théorème (8.5). Nous appelons  $(\alpha^\xi, \nu^\xi)$  les coefficients de  $\xi$ .

En effet par définition, nous avons

$$\begin{aligned} d\phi(t, \xi(t, y)) &= 0 \\ &= \mu(t, \xi(t, y))dt + \gamma(t, \xi(t, y))dW_t + \phi'(t, \xi(t, y))d\xi(t, y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\phi''(t, \xi(t, y)) < d\xi(t, y) > + < \phi'(t, \xi(t, y)), \nu^\xi(t, y) > dt \end{aligned}$$

Partant des identités suivantes

$$\phi'(t, \xi(t, y)) = \frac{1}{\xi'(t, y)}, \quad \phi''(t, \xi(t, y)) = -\frac{\xi''}{(\xi')^3}(t, y),$$

la forme nécessaire des coefficients de  $\xi$  est :

$$\begin{aligned} \alpha^\xi(t, y) &= -\xi'(t, y)\mu(t, \xi(t, y)) + \xi' < \gamma(t, \xi(t, y)), \gamma'(t, \xi(t, y)) > \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi''(t, y)\|\gamma(t, \xi(t, y))\|^2 \\ \nu^\xi(t, y) &= -\xi'(t, y)\gamma(t, \xi(t, y)). \end{aligned}$$

$\alpha^\xi$  se réécrit donc comme

$$\alpha^\xi(t, y) = -\xi'(t, y)\mu(t, \xi(t, y)) + \frac{1}{2}\partial_y(\xi'(t, y)\|\gamma\|^2(t, \xi(t, y))).$$

Une autre formulation utilisant que  $\xi' \neq 0$  et la forme de la volatilité de  $\xi$  est

$$\alpha^\xi(t, y) = -\xi'(t, y)\mu(t, \xi(t, y)) + \frac{1}{2}\partial_y(\|\nu^\xi(t, y)\|^2/\xi'(t, y)).$$

□

## 8.7.2 EDP stochastique de l'utilité définie à partir de la composition des flots

Le but de ce paragraphe est de décrire la décomposition de l'utilité progressive  $u$ , définie dans (8.5), notamment sa volatilité  $\Gamma_u$  en fonction de celle de la richesse optimale  $X^*$  et du processus  $\mathcal{Y}$ . Il n'est pas nécessaire de supposer connu le fait que  $u$ , définie dans (8.5) soit une utilité progressive, car le calcul stochastique nous permettra de le retrouver directement.

Nous commençons par préciser les hypothèses de régularité sur les flots  $\mathcal{X}^*(x)$  et  $\mathcal{Y}(\cdot, x)$  nécessaires pour notre propos.

**Hypothèse 8.5.** – *Le processus de richesse optimale  $X_t^*(x)$  est une famille de martingales locales qui, par rapport à la richesse initiale  $x$ , est strictement croissante, deux fois continûment dérivable, et telle que les coefficients de sa décomposition d'Itô*

$$dX_t^*(x) = \gamma(t, x)dW_t, \quad \gamma \in \mathcal{K} \quad (8.17)$$

*appartiennent à la classe  $\mathcal{B}^{1,0}$ .*

– *La famille de martingales locales  $(\mathcal{Y}(x))$  est par rapport à  $x$ , strictement décroissante, deux fois continûment dérivable, et telle que les coefficients de sa décomposition d'Itô*

$$d\mathcal{Y}(t, x) = \nu(t, x)dW_t, \quad \nu \in (\mathcal{K}\sigma)^* \cap \gamma^\perp \quad (8.18)$$

*appartiennent à la classe  $\mathcal{B}^{1,0}$ . Notons que  $(\mathcal{K}\sigma)^* \cap \gamma^\perp = (\mathcal{K}\sigma)^\perp$  si  $\mathcal{K}$  est un sous espace vectoriel.*

– *La condition initiale  $\mathcal{Y}(0, \cdot) = u'_0(\cdot)$  est une fonction décroissante sur  $(0, \infty)$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .*

L'hypothèse sur la richesse optimale est introduite pour garantir que le flot inverse est bien une famille de semimartingales d'Itô dont on connaît les coefficients.

**Théorème 8.6.** *Soit  $(X_t^*(x))$ , and  $(\mathcal{Y}(t, x))$  deux flots stochastiques satisfaisant les hypothèses et notations 8.5. Alors le processus  $u$  défini par*

$$u(t, x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t, z))dz$$

*satisfait*

$$\begin{cases} du(t, x) &= \frac{1}{2}[u''(t, x)\|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2]dt + \Gamma_u(t, x)dW_t, \\ \Gamma_u(t, x) &= \int_0^x [\nu(t, \mathcal{X}(t, z)) - u''(t, z)\gamma(t, \mathcal{X}(t, z))]dz + C_t, \\ \Gamma'_u{}^{\mathcal{K}}(t, x) &= -u''(t, x)\gamma(t, \mathcal{X}(t, x)). \end{cases} \quad (8.19)$$

*$u$  est donc une utilité progressive puisque sa dynamique vérifie aussi,*

$$du(t, x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\|\Gamma'_u{}^{\mathcal{K}}(t, x)\|^2}{u''(t, x)}\right]dt + \Gamma_u(t, x)dW_t$$

de classe  $\mathcal{C}^3$  en  $x$ , dont la dérivée de la volatilité  $\Gamma_u$  est la somme des deux vecteurs orthogonaux  $\nu(t, \mathcal{X}(t, x))$ , qui appartient au cône orthogonal des contraintes, et  $(-u''(t, x))\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))$  qui est colinéaire à la volatilité de la richesse optimale.

*Démonstration.* Sous l'hypothèse 8.5 pour  $X^*$ , supposé de plus martingale locale, la dynamique de l'inverse  $\mathcal{X}$  de  $X^*$  satisfait, d'après le lemme 8.2, c-à-d.,

$$d\mathcal{X}(t, y) = -\mathcal{X}'(t, y)\gamma(t, \mathcal{X}(t, y))dW_t + \frac{1}{2}\partial_y(\mathcal{X}'(t, y)\|\gamma(t, \mathcal{X}(t, y))\|^2)dt.$$

Les hypothèses faites sur les flots  $X$  et  $\mathcal{Y}$  impliquent que nous pouvons appliquer la formule d'Itô-Ventzel au flot composé  $\mathcal{Y}o\mathcal{X}$ , pour étudier le flot  $u'(t, x)$ . Nous commençons par nous intéresser au terme en  $dW_t$ , dont le coefficient est la dérivée de la volatilité de l'utilité  $\Gamma_u$ . Comme  $(\mathcal{Y}o\mathcal{X})\mathcal{X}' = u''$ , la formule (8.5) nous donne que

$$\Gamma'_u(t, x) = \nu(t, \mathcal{X}(t, x)) - u''(t, x)\gamma(t, \mathcal{X}(t, x)). \quad (8.20)$$

Cette décomposition du vecteur de volatilité se fait pas l'intermédiaire de deux vecteurs orthogonaux, le premier  $\nu(t, \mathcal{X}(t, x))$  appartient par hypothèse à l'espace orthogonal des contraintes, le second est proportionnel à la volatilité de la richesse optimale et appartient par hypothèse à l'espace des contraintes. Par suite la projection  $\Gamma'_{u,\mathcal{K}}(t, x)$  de  $\Gamma'_u$  sur l'espace  $\mathcal{K}_t\sigma_t$  est le vecteur  $\Gamma'_{u,\mathcal{K}}(t, x) = (-u''(t, x))\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))$ .

Comme  $u' = \mathcal{Y}o\mathcal{X}$ , cette volatilité n'est autre que celle de  $u'$ , et pour retrouver celle de  $u$ , il suffit d'intégrer en  $x$  pour obtenir le résultat.

Nous nous intéressons maintenant au drift  $\mu^{u'}$  de la dérivée de l'utilité progressive  $\mathcal{Y}o\mathcal{X}$ . Sous les hypothèses précédentes, par l'équation (8.15), nous avons

$$\begin{aligned} \mu^{u'}(t, x) &= \frac{1}{2}(\mathcal{Y}'o\mathcal{X})(t, x)(\mathcal{X}'(t, x)\|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2)' \\ &+ \left[ \frac{1}{2}(\mathcal{Y}''o\mathcal{X})(t, x)\|\mathcal{X}'(t, x)\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{X}'(t, x) < \nu(t, \mathcal{X}(t, x)), \gamma(t, \mathcal{X}(t, x)) > \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer cette équation en utilisant d'une part que par hypothèse  $< \nu, \gamma > = 0$ , d'autre part que

$$\begin{aligned} (\mathcal{Y}'o\mathcal{X}(t, x))' &= \mathcal{Y}''o\mathcal{X}(t, x)\mathcal{X}'(t, x) \\ u''(t, x) &= \mathcal{Y}'o\mathcal{X}(t, x)\mathcal{X}'(t, x). \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned}
 \mu^{u'}(t, x) &= \frac{1}{2}((\mathcal{Y}' \circ \mathcal{X}(t, x) \mathcal{X}'(t, x) (\mathcal{X}'(t, x) \|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2) \\
 &\quad + (\mathcal{Y}'' \circ \mathcal{X})(t, x) \mathcal{X}'(t, x) [\mathcal{X}'(t, x) \|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2]') \\
 &= \frac{1}{2}[\mathcal{Y}' \circ \mathcal{X}(t, x) \mathcal{X}'(t, x) \|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2]' \\
 &= \frac{1}{2}[u''(t, x) \|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2]'.
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Enfin, en intégrant par rapport à  $x$ , et en utilisant que  $u(t, 0) \equiv 0$ , nous déduisons que  $u$  suit la dynamique

$$du(t, x) = \frac{u''(t, x)}{2} \|\gamma(t, \mathcal{X}(t, x))\|^2 dt + \Gamma_u(t, x) dW_t.$$

Ce dernier terme s'interprète à l'aide de la projection de la dérivée de la volatilité sur l'espace des contraintes, puisque

$$\Gamma_u'^{\mathcal{K}}(t, x) = (-u''(t, x))\gamma(t, \mathcal{X}(t, x)).$$

Nous avons alors la forme équivalente, caractéristique des utilités progressives,

$$du(t, x) = \frac{\|\Gamma_u'^{\mathcal{K}}(t, x)\|^2}{2u''(t, x)} dt + \Gamma_u(t, x) dW_t.$$

Il nous reste à vérifier par des outils du calcul stochastique, que  $u$  est bien une utilité progressive et que les flots  $X^*$  et  $\mathcal{Y}$  sont bien optimaux pour le problème primal et le problème dual. Ceci est rendu facile d'après (8.20), par les résultats du chapitre 5, la proposition 6.1 du chapitre 6 et les théorèmes 7.3 et 7.6 du chapitre 7. Comme précédemment, nous notons  $X^u(t, x)$  et  $L^{\tilde{u}}$  les processus optimaux aux problèmes dual et primal associés à l'utilité  $u$ , dont nous savons qu'ils vérifient

$$\begin{cases} dX^u(t, x) = -\frac{\Gamma_u'^{\mathcal{K}}}{u''}(t, X^u(t, x)) dW_t \\ d(u'(0, x) L^{\tilde{u}, u'(0, x)}_t) = \frac{\Gamma_u'^{\perp}}{u''}(t, X^u(t, x)) dW_t. \end{cases}$$

Ces équations se récrivent, en utilisant que  $\Gamma_u'^{\mathcal{K}} = u''(t, x)\gamma(t\xi(t, x))$ ,

$$\begin{cases} dX^u(t, x) = \gamma(t, \mathcal{X}(t, X^u(t, x))) dW_t \\ d(u'(0, x) L^{\tilde{u}, u'(0, x)}_t) = \nu(t, \mathcal{X}(t, X^u(t, x))) dW_t. \end{cases}$$

Ceci qui implique que  $X^u$  a la même dynamique que  $X^*$  ( puisque  $\mathcal{X}(t, X_t^*(x) = x)$  qui à son tour (par le même raisonnement) vérifie  $u(t, X_t^*(x))$  est une martingale locale. Les deux portefeuilles  $X^u(t, x)$  et  $X_t^*(x)$  sont optimaux et de même richesse initiale. Par la stricte concavité de  $u$ , ils ne peuvent qu'être égaux. De la même manière, on montre que  $L_t^{\tilde{u}, u'(0, x)} = \mathcal{Y}(t, \cdot) / \mathcal{Y}(0, \cdot)$  est la mesure martingale optimale pour  $u$ .

□

## 8.8 Retour sur le marché initial

Comme notre but au début de cette seconde partie est d'étudier les utilités progressives dans l'univers d'investissement  $\mathcal{M}^{r, \eta}$  décrit dans le paragraphe 5.2 du chapitre 5, nous donnons dans cette section les équivalents des résultats des paragraphes précédents établis dans le cadre de marché martingale où le taux court et la prime de marché sont nulles. Pour cela, il est important de rappeler quelques notations et résultats des chapitres précédents. Nous rappelons essentiellement l'univers d'investissement du chapitre 5 et comment nous sommes arrivés au marché martingale à partir de cet univers, paragraphe 6.2 chapitre 6.

### Univers d'investissement de départ :

L'univers d'investissement initial consiste en un marché financier où les processus de richesse notés  $\tilde{X}$  obéissent à la dynamique suivante,

$$d\tilde{X}_t^{x, \pi} = r_t \tilde{X}_t^{x, \pi} dt + \pi_t \sigma_t (dW_t + \eta_t dt), \quad \tilde{X}_0^{x, \pi} = x, \quad \pi_t \in \mathcal{K}_t$$

où  $\eta$  désigne la prime de risque appelée aussi prime de marché, et  $r$  le taux court. Le processus  $H^{r, \eta}$ , l'inverse du numéraire de marché, est le processus stochastique défini par

$$\frac{dH_t^{r, \eta}}{H_t^{r, \eta}} = -r_t dt - \eta_t dW_t.$$

En particulier, pour toute stratégie  $\pi \in \mathcal{K}$ , le processus  $H_t^{r, \eta} \tilde{X}_t^{x, \pi}$  est une martingale locale positive (sous la probabilité  $\mathbb{P}$ ).

### 8.8.1 Conditions nécessaires d'optimalité dans cet univers et constructions des utilités progressives

Soit  $v$  une utilité progressive dans le marché initial décrit ci-dessus. En adoptant des notations similaires aux paragraphes précédents nous notons  $\tilde{X}^*(x)$  la richesse optimale associée et  $\tilde{\mathcal{Y}}$  le processus défini par  $\tilde{\mathcal{Y}}(t, x) = v'(t, \tilde{X}_t^*(x))$ . D'après les résultats du théorème 7.2, ces processus satisfont les conditions nécessaires d'optimalité suivantes :

- (M1) Les champs aléatoires  $(\tilde{X}_t^*(x); x \geq 0, t \geq 0)$  et  $(\tilde{\mathcal{Y}}(t, x); x \geq 0, t \geq 0)$  sont strictement monotones :  $\tilde{X}_t^*(x)$  est croissant de 0 à  $+\infty$ , alors que  $\tilde{\mathcal{Y}}(t, x)$  est décroissant de  $+\infty$  à 0, de sorte que les conditions d'Inada sont satisfaites.  $\tilde{\mathcal{Y}}(0, x)$  est une fonction décroissante, notée  $u'_0(x)$ . On suppose de plus que  $\tilde{\mathcal{Y}}(t, x)$  est intégrable en  $x$ , au voisinage de  $x = 0$ .
- (O'1) Pour tout  $x$ ,  $(\tilde{X}_t^*(x))_{t \geq 0}$  est un portefeuille de richesse admissible, et donc  $(\tilde{X}_t^*(x)H_t^{r, \eta})$  est une martingale locale. De même, le processus  $(\tilde{\mathcal{Y}}(t, x))_{t \geq 0}$  est une surmartingale positive
- (O2) Pour tout  $x$ , le processus  $(\tilde{X}_t^*(x)\tilde{\mathcal{Y}}(t, x))_{t \geq 0}$  est une "vraie" martingale.
- (O3) Pour toute stratégie admissible  $\pi$  et pour tout capital initial  $x$  et  $x'$ , le processus  $(\tilde{X}_t^\pi(x')\tilde{\mathcal{Y}}(t, x))_{t \geq 0}$  est une surmartingale positive, (une martingale locale dans le cas où l'espace des contraintes  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel.)

Notons que les conditions (M1), (O2) et (O3) sont identiques aux conditions nécessaires (M1), (O2) et (O3) du paragraphe 8.4.2, seulement (O'1) est légèrement différente de (O1).

**Définition 8.3.** Une famille de couples de semimartingales continues, indexées par un paramètre (de richesse)  $x > 0$ ,  $\{(\tilde{X}_t^*(x), \tilde{\mathcal{Y}}(t, x)); t \geq 0, x > 0\}$  est dite satisfaire les conditions  $(\mathcal{O}^*)$  dans le marché de paramètres  $(r, \eta)$  contraint par  $\mathcal{K}$ , si elle satisfait les conditions (M1), (O'1), (O2) et (O3) ci-dessus.

**Remarque 8.3.** Comme dans le cadre des sections précédentes, la richesse optimale  $\tilde{X}^*$  étant fixée, nous pouvons montrer à l'aide du lemme 7.2 et de la dynamique (7.16) que toutes les  $\tilde{\mathcal{Y}}$  telles que  $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$  satisfait les conditions  $(\mathcal{O}^*)$ , obéissent à la dynamique suivante

$$\frac{d\tilde{\mathcal{Y}}(t, x)}{\tilde{\mathcal{Y}}(t, x)} = -r_t dt + (\nu_t \sigma_t - \eta_t) dW_t, \quad \nu_t \in \mathcal{K}_t^* \cap (\gamma_t)^\perp \quad (8.22)$$



où nous avons noté  $\gamma$  la stratégie optimale. Dans le cas où  $\mathcal{K}_t$  est espace vectoriel,  $\mathcal{K}_t^* \cap (\gamma_t)^\perp = \mathcal{K}^\perp$ .

Comme nous avons déjà pu le remarquer à plusieurs reprises, les preuves des théorèmes 8.1 et 8.2 ainsi que la proposition 8.3 sont essentiellement basées sur les conditions nécessaires (O2) et (O3) du paragraphe 8.4.2. Comme ces conditions sont encore satisfaites dans ce marché, nous pouvons alors reproduire le même raisonnement et des preuves identiques pour établir le résultat suivant :

**Théorème 8.7.** *Soit  $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$  un couple de processus stochastiques qui satisfait les conditions  $(\mathcal{O}^*)$  et l'hypothèse 8.3. En notant  $\tilde{\mathcal{X}}$  l'inverse par rapport à  $x$  de  $\tilde{X}^*$ , le processus  $v$  défini par*

$$v(t, x) = \int_0^x \tilde{\mathcal{Y}} \circ \tilde{\mathcal{X}}(t, z) dz \quad (8.23)$$

- ✓ *est une utilité progressive de portefeuille optimale  $\tilde{X}^*$ .*
- ✓ *Le processus  $\tilde{\mathcal{Y}}(t, x)/\tilde{\mathcal{Y}}(0, x)$  est le processus optimal au problème dual.*

### 8.8.2 Quelques remarques

Il est intéressant de remarquer que ce dernier théorème peut être démontré directement à l'aide du théorème 8.2, et les résultat du chapitre précédent, et ce dans les deux cas suivants :

**Hypothèse 8.6.**     – *Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{K}_t$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ .*  
                           – *La prime de marché  $\eta$  satisfait  $\eta_t \sigma_t^{-1} \in \mathcal{K}_t \cap (-\mathcal{K}_t)$  si  $\mathcal{K}_t$  est simplement un cône convexe.*

En effet, sous ces deux hypothèses, nous avons pu, dans le paragraphe 6.4, montrer que le changement de numéraire  $H^{r, \eta}$  n'affecte pas l'espace des contraintes et par conséquent les contraintes sont les mêmes dans les deux marchés (le marché décrit initial et le marché martingale).

Montrons maintenant le théorème 8.7. Pour cela quelques rappels sont nécessaires.

**Marché martingale :**

Le marché martingale considéré dans ce chapitre est le marché financier dont les richesses sont obtenues par le changement de numéraire  $1/H^{r,\eta}$ , c-à-d. les richesses  $X$  du marché martingale sont données par  $X = \tilde{X}H^{r,\eta}$  ( $\tilde{X}$  représente les richesses dans le marché initial), pour plus de détails voir paragraphe 6.2 pour le changement de numéraire de manière générale et le paragraphe 6.4 pour le cas particulier où le numéraire est  $1/H^{r,\eta}$ .

Nous avons montré dans le paragraphe 6.2, qu'il existe une équivalence entre les utilités progressives des deux marchés et ce dans le théorème 6.1 (théorème général pour les changements de numéraire), dont une version est donnée par le corollaire suivant :

**Corollaire 8.1.** *Soit  $(v(t, x))_{t \geq 0, x > 0}$  un champ aléatoire. Alors  $v$  est une utilité progressive dans le marché initial  $\mathcal{M}^{r,\eta}$ , si et seulement si le champ aléatoire  $u$  défini par*

$$u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} v(t, \frac{x}{H_t^{r,\eta}})$$

*est une utilité progressive dans le marché martingale. Si de plus  $X^{x,*}$  et  $\tilde{X}^{x,*}$  désignent respectivement les processus de richesses optimales générés par  $u$  et  $v$ , alors,  $\tilde{X}^{x,*} = X^{x,*}/H_t^{r,\eta}$ .*

Par conséquent, si  $X^*$  satisfait l'hypothèse de monotonie 8.1 et l'hypothèse 8.3, ceci est équivalent à : la richesse optimale  $\tilde{X}^{x,*}$  (associée à  $v$ ) satisfait les mêmes hypothèses. Si de plus  $\mathcal{X}$  et  $\tilde{\mathcal{X}}$  désignent les inverses respectifs de ces deux richesses optimales alors pour tout  $t \geq 0$  et  $z > 0$ ,

$$\tilde{\mathcal{X}}(t, z) = \mathcal{X}(t, zH_t^{r,\eta}). \quad (8.24)$$

Finalement, si  $u$  est une utilité progressive dans le marché martingale de richesse optimale  $X^{x,*}$  strictement croissante (vérifiant l'hypothèse 8.3), alors par le théorème 8.2, il existe un processus  $\mathcal{Y}$  strictement décroissant :  $(X^{x,*}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{Z}$  tel que

$$u(t, x) = \int_0^x \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, z) dz.$$

En appliquant le résultat du corollaire précédent,  $v$  est donnée par

$$v(t, x) = u(t, xH_t^{r,\eta}) = \int_0^{xH_t^{r,\eta}} \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, z') dz'.$$

Par le changement de variable  $z = z'/H_t^{r,\eta}$ , cette dernière identité se réécrit

$$v(t, x) = \int_0^x H_t^{r,\eta} \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}(t, z H_t^{r,\eta}) dz.$$

Notons par  $\tilde{\mathcal{Y}}$  la sous-martingale défini par  $\tilde{\mathcal{Y}} \stackrel{def}{=} H_t^{r,\eta} \mathcal{Y}$ . D'après l'identité (8.24),

$$v(t, x) = \int_0^x \tilde{\mathcal{Y}} \circ \tilde{\mathcal{X}}(t, z) dz.$$

**Remarque 8.4.** Remarquons enfin que le couple  $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$  satisfait les conditions  $(\mathcal{O}'^*)$  (voir définition 8.3 ) puisque, sous les hypothèses 8.6, les deux assertions suivantes sont équivalentes,

1.  $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$  satisfait les conditions  $(\mathcal{O}'^*)$ .
2.  $(\tilde{X}^* H^{r,\eta}, \frac{\tilde{\mathcal{Y}}}{H^{r,\eta}})$  satisfait les conditions  $(\mathcal{O}'^*)$ .

# Annexe A

## Semimartingales Avec Paramètres Spatiaux

### Sommaire

---

A.1 Introduction . . . . .	266
A.2 Préliminaires . . . . .	266
A.3 Régularité par rapport à $x$ . . . . .	269
A.4 Lemme d'Itô-Ventzel & Formules d'intégration	270
A.5 Équations différentielles stochastiques . . . . .	273
A.6 Flots stochastiques . . . . .	276

---

*Résumé :*

*Le but de cet appendice n'est pas d'expliciter la théorie générale des semimartingales avec des paramètres spatiaux, des équations différentielles stochastiques et des flots stochastiques, mais de donner uniquement les résultats nécessaires dans notre étude. Nous nous donnerons pas les preuves des théorèmes que nous énoncerons. Une étude très complète et approfondie de ces notions ainsi que tous les détails des démonstrations sont donnés essentiellement dans les chapitres 3 et 4 de [74].*

## A.1 Introduction

Soient  $f_t(x)$  un processus prévisible dépendant d'un paramètre  $x$  et  $M_t$  une martingale locale continue.

Définissons l'intégrale d'Itô suivante,

$$M(t, x) = \int_0^t f_s(x) dM_s. \quad (\text{A.1})$$

Si nous supposons que

$$\int_0^T f_s^2(x) d\langle M \rangle_s < +\infty, \quad \text{pour tout } x,$$

nous savons que  $M(t, x)_{t \leq T}$  est une martingale locale continue pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N_x$ , où  $N_x$  est un ensemble négligeable qui dépend de  $x$ .  $M(t, x)$  est alors défini pour tout  $(t, x)$  si  $\omega \in (\cup_x N_x)^c$ . Le problème qui se pose à ce niveau est le suivant : de manière générale, comme il n'est pas l'union dénombrable de négligeables, l'ensemble  $\cup_x N_x$  n'est pas de mesure nulle. Pour surmonter cette difficulté technique et pouvoir définir des intégrales de la forme (A.1) nous devrions au moins considérer des intégrales  $M(t, x)$  qui admettent une modification ayant de bonnes propriétés dans le sens où cette modification est bien définie pour tout  $(t, x)$  p.s. continue en  $x$  pour tout  $t$  p.s.

Se basant essentiellement sur le chapitre 3 de [74], dans une première partie nous rappelons les principaux résultats de continuité de différentiabilité par rapport à  $x$  des semimartingales continues. Dans la seconde partie, nous donnerons la principale formule d'intégrale stochastique d'Itô généralisée que nous utiliserons tout au long de l'étude des utilités *progressives*.

## A.2 Préliminaires

**Définition A.4.** *Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique réel, complet au sens des espaces uniformes et satisfaisant l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

- \* *l'espace est localement convexe et métrisable par une distance invariante par translation ;*

\* *il existe une famille dénombrable et séparante de seminormes continues qui engendre la topologie de l'espace.*

L'équivalence de ces deux conditions se montre en construisant une famille dénombrable et séparante de seminormes à partir de n'importe quelle distance invariante et réciproquement. Il n'y a cependant pas de bijection naturelle entre les distances invariantes compatibles et les familles dénombrables et séparantes de seminormes.

Pour un espace de Fréchet donné, il existe en général plusieurs distances invariantes définissant la topologie et elles induisent toutes une structure d'espace métrique complet. De même, il n'y a pas de choix canonique de famille de seminormes. Dans cette section nous donnons quelques notations et nous définissons quelques espaces qui nous seront très utiles dans ce rappel.

Soit  $\mathcal{I}$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ , pour  $m$  un entier naturel nous notons  $\mathcal{C}^m(\mathcal{I}, \mathbb{R})$  ou tout simplement  $\mathcal{C}^m$  l'ensemble de toutes les applications  $f : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$   $m$ -fois continûment différentiable. Si  $m = 0$ , cet espace est noté  $\mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ . Pour un  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  nous définissons l'opérateur de différentiation  $D_x^\alpha$  par

$$D_x^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha^1} \dots (\partial x^d)^{\alpha^d}}$$

où  $|\alpha| = \sum_{i=1..d} \alpha_i$ .

Soit  $K$  un sous-ensemble de  $\mathcal{I}$ . Notons

$$\|f\|_{m;K} = \sup_{x \in K} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D_x^\alpha f(x)|.$$

Muni des seminormes  $\{\| \cdot \|_{m;K} : K \text{ compact dans } \mathcal{I}\}$ ,  $\mathcal{C}^m(\mathcal{I}, \mathbb{R})$  est un espace de Fréchet. Nous confondrons, par ailleurs  $\| \cdot \|_{m;\mathcal{I}}$  et  $\| \cdot \|_m$ . Nous noterons en particulier  $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{I}, \mathbb{R})$  ou encore  $\mathcal{C}_b^m$  l'ensemble  $\{f \in \mathcal{C}^m : \|f\|_m < +\infty\}$ , et nous noterons que c'est un espace de Banach muni de la norme  $\| \cdot \|_m$ .

Soit maintenant  $\delta \in [0, 1]$ . Notons par  $\mathcal{C}^{m,\delta}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$  ou simplement  $\mathcal{C}^{m,\delta}$  l'ensemble de toutes les applications  $f$  de  $\mathcal{C}^m$  tel que  $D^\alpha, |\alpha| = m$  sont  $\delta$ -Hölder continues.

Muni des seminormes

$$\|f\|_{m+\delta;K} = \|f\|_{m;K} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \frac{|D_x^\alpha f(x) - D_x^\alpha f(y)|}{|x - y|^\delta},$$

est un espace de Fréchet.

**Définition A.5.** Une fonction  $f(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathcal{I}$  continue appartient à  $\mathcal{C}^{m, \delta}$  si pour tout  $t$ ,  $f(t) \equiv f(t, \cdot)$  est dans  $\mathcal{C}^{m, \delta}$  et  $\|f(t)\|_{m+\delta; K}$  est intégrable sur  $[0, T]$  pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{I}$ . Si  $K$  est remplacé par  $\mathcal{I}$ ,  $f$  est dite dans la classe  $\mathcal{C}_b^{m, \delta}$ . Si de plus  $\|f(t)\|_{m+\delta}$  est bornée en  $t$ , nous disons que  $f$  est dans  $\mathcal{C}_{ub}^{m, \delta}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ .

Nous noterons l'inclusion suivante :

**Lemme A.3.** Soit  $m > 0$  alors pour tout  $m' : 0 \leq m' < m$  et pour tout  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $\mathcal{C}^{m', \delta} \subset \mathcal{C}^m$ .

Il reste encore quelques classes que nous devons introduire avant de donner quelques résultats qui nous sont d'une grande utilité dans l'étude des utilités progressives.

**Définition A.6.** Nous notons  $\tilde{\mathcal{C}}^m(\mathcal{I}, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions  $g(x, y)$ ,  $x, y \in \mathcal{I}$   $m$ -fois continûment différentiables par rapport aux deux variables  $x, y \in \mathcal{I}$ .

Pour  $g \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ , nous définissons les seminormes :

$$\|g\|_{m; K}^{\sim} = \sup_{x, y \in K} \frac{|g(x, y)|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x, y \in K} |D_x^\alpha D_y^\alpha g(x, y)|$$

et pour  $0 < \delta \leq 1$ ,

$$\|g\|_{m+\delta; K}^{\sim} = \|g\|_{m; K}^{\sim} + \sum_{|\alpha|=m} \|D_x^\alpha D_y^\alpha g(x, y)\|_{\delta; K}^{\sim}$$

où

$$\|g\|_{\delta; K}^{\sim} = \sup_{\substack{x, x', y, y' \in K \\ x \neq x', y \neq y'}} \frac{|g(x, y) - g(x', y) - g(x, y') + g(x', y')|}{|x - x'|^\delta |y - y'|^\delta}.$$

**Définition A.7.** Une fonction  $g$  est dite dans la classe  $\tilde{\mathcal{C}}^{m, \delta}$  si  $\|g\|_{m; K}^{\sim} < +\infty$  pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{I}$ . Nous noterons  $\|\cdot\|_{m; \mathcal{I}}^{\sim}$  et  $\|\cdot\|_{m+\delta; \mathcal{I}}^{\sim}$  respectivement  $\|\cdot\|_m^{\sim}$  et  $\|\cdot\|_{m+\delta}^{\sim}$  et enfin

$$\tilde{\mathcal{C}}_b^m = \{g : \|g\|_m^{\sim} < +\infty\} \quad (\text{A.2})$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}^{m, \delta} = \{g : \|g\|_{m+\delta}^{\sim} < +\infty\}. \quad (\text{A.3})$$

**Définition A.8.** Une fonction  $g(t, x, y)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in \mathcal{I}$  continue appartient à  $\tilde{\mathcal{C}}^{m, \delta}$  si pour tout  $t$ ,  $g(t) \equiv g(t, \cdot, \cdot)$  est dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{m, \delta}$  et  $\|g(t)\|_{m+\delta; K}^\sim$  est intégrable sur  $[0, T]$  pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{I}$ . Les espaces  $\tilde{\mathcal{C}}_b^{m, \delta}$  et  $\tilde{\mathcal{C}}_{ub}^{m, \delta}$  sont définis de manière similaire à  $\mathcal{C}_b^{m, \delta}$  et  $\mathcal{C}_{ub}^{m, \delta}$ .

Soit  $F(t, x)$  une famille de processus à valeurs dans  $\mathbb{R}$  paramétrée par  $x \in \mathcal{I}$ . Nous pouvons la voir comme un champ aléatoire de deux paramètres  $x$  et  $t$ . Si  $F(t, x, \omega)$  est une fonction continue de  $x$  pour tout  $\omega$  et  $t$ , nous considérons  $F(t, \cdot)$  comme un processus stochastique à valeurs dans  $\mathcal{C}$ . De même, si  $F(t, x, \omega)$  est une fonction  $m$  fois continûment différentiable par rapport à  $x$  p.s pour tout  $t$ , nous dirons que c'est un processus stochastique à valeurs dans  $\mathcal{C}^m$  ou encore un  $\mathcal{C}^m$ -processus. Les  $\mathcal{C}^{m, \delta}$ -processus sont définis de la même manière.

Soit  $G(t, x, y)$  un processus stochastique indexé par  $x, y \in \mathcal{I}$ . S'il est  $m$ -fois différentiable par rapport à chacune de ces deux variables  $x$  et  $y$  p.s. pour tout  $t$  il est appelé processus stochastique à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^m$  ou aussi un  $\tilde{\mathcal{C}}^m$ -processus. Les  $\tilde{\mathcal{C}}^{m, \delta}$  sont définis de manière analogue.

**Définition A.9.** Soient  $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$  et  $(X'_t, t \in \mathbb{R}^+)$  deux processus définis sur  $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ .

- (i) On dit que  $X'_t$  est une modification de  $X_t$  si, pour tout  $t$ ,  $X'_t = X_t$  p.s.
- (ii) On dit que  $X'_t$  et  $X_t$  sont indistinguables si p.s.  $X'_t = X_t$  pour tout  $t$ .

## A.3 Régularité par rapport à $x$

**Théorème A.8.** Soit  $M(t, x)$ ,  $x \in \mathcal{I}$  une famille de martingales locales continues tel que  $M(0, x) \equiv 0$ . Supposons que la variation quadratique jointe noté  $A$  et définie par

$$A(t, x, y) = \langle M(\cdot, x), M(\cdot, y) \rangle_t$$

admet une modification continue à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{0, \delta}$ ,  $0 < \delta \leq 1$ . Alors  $M(t, x)$  admet une modification continue à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{0, \varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon < \delta$ .

**Théorème A.9.** Soit  $M(t, x)$ ,  $x \in \mathcal{I}$  une famille de martingales locales continues tel que  $M(0, x) \equiv 0$ . Supposons que la variation quadratique jointe  $A$  et



définie par

$$A(t, x, y) = \langle M(\cdot, x), M(\cdot, y) \rangle_t$$

admet une modification continue à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{m,\delta}$ ,  $m \geq 1$ ,  $\delta > 0$ . Alors  $M(t, x)$  admet à son tour une modification continue à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{m,\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon < \delta$ . De plus, pour tout  $\alpha$  vérifiant  $|\alpha| \leq m$ ,  $D_x^\alpha M(t, x)$ ,  $x \in \mathcal{I}$  est une famille de martingales locales continues dont la variation quadratique jointe est donnée par  $D_x^\alpha D_y^\alpha A(t, x, y)$ .

**Théorème A.10.** Soit  $M(t, x)$ ,  $x \in \mathcal{I}$  et  $N(t, y)$ ,  $y \in \mathcal{I}$  des martingales locales continues à valeurs dans  $\mathcal{C}^{m,\delta}$ ,  $m \geq 0$ ,  $\delta > 0$ . Alors la variation quadratique jointe  $A(t, x, y) = \langle M(t, x), N(t, y) \rangle$  admet une modification continue à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{m,\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon < \delta$  et satisfait

$$D_x^\alpha D_y^\beta \langle M(t, x), N(t, y) \rangle = \langle D_x^\alpha M(t, x), D_y^\beta N(t, y) \rangle$$

pour tout  $t$  si  $m \geq 1$  et  $|\alpha|, |\beta| \leq m$ .

## A.4 Lemme d'Itô-Ventzel & Formules d'intégration

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre, et consiste en une généralisation du lemme d'Itô classique. Il nous est très utile tout au long de notre étude des processus des utilités progressives.

Dans les résultats qui suivent, les semimartingales  $F$  obéissent à la dynamique suivante,

$$dF(t, x) = \beta(t, x)dt + \Gamma(t, x)dW_t \tag{A.4}$$

où  $\beta$  et  $\Gamma$  sont deux familles de processus prévisibles.

**Définition A.10.** On appelle caractéristiques locales de  $F$  le couple  $(\beta, \Gamma)$ .

Les familles des semimartingales  $F(t, x)$ ,  $x \in \mathcal{I}$  sont alors classées suivant la régularité de leurs caractéristiques locales. Les caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  sont dites dans la classe  $(\mathcal{B}^{m,\delta}, \mathcal{B}^{m',\delta'})$  si

- $\beta(t, x)$  est un processus prévisible à valeurs dans  $\mathcal{C}^{m, \delta}$  et pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{I}$ ,  $\|\beta(t)\|_{m+\delta; K} \in L^1$ .
- La variation quadratique jointe  $a(t, x, y) = \langle \Gamma(t, x), \Gamma(t, y) \rangle$  admet une modification prévisible à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{C}}^{m', \delta'}$  et  $\|a\|_{m'+\delta'; K} \in L^1$  p.s. pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{I}$ .

Si  $m = m'$  et  $\delta = \delta'$ , le couple  $(\beta, \Gamma)$  est dit simplement dans la classe  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ .

**Lemme A.4.** Soit  $v \in \mathcal{C}^{m, \delta}$ , alors le processus  $a$  défini par  $a(t, x, y) = v(t, x)v(t, y)$  est dans  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ .

**Remarque A.5.** Dans [74], l'auteur définit les caractéristiques locales de  $F$  comme étant le couple  $(\beta, a(\Gamma)(t, x, y))$  où

$$a(\Gamma)(t, x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Gamma(t, x), \Gamma(t, y) \rangle.$$

Ce n'est que la notation qui change, par contre tout le reste est identique, notamment les classes des processus  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ .

**Théorème A.11.** (formule d'Itô généralisée)

Soient  $F(t, x)$  un  $\mathcal{C}^2$ -processus et une  $\mathcal{C}^1$ -semimartingale de la forme (A.4) tel que ses caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{1, 0}$ ,  $X_t$  une semimartingale continue à valeurs dans  $\mathcal{I}$ . Alors  $F(t, X_t)$  est une semimartingale continue obéissant à la dynamique

$$\begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, X_0) + \int_0^t \beta(s, X_s) ds + \int_0^t \Gamma(s, X_s) dW_s \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(s, X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(s, X_s) \langle X^i, X^j \rangle_s ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}(s, X_s), X_s^i \right\rangle ds. \end{aligned} \tag{A.5}$$

### Exemple

Soit  $f$  une fonction à trois variables  $(t, x, y)$  dérivable en temps et deux fois dérivable en  $(x, y)$  et soient  $X$  et  $Y$  deux processus stochastiques continus obéissant aux dynamiques

$$dX_t = q_t X_t dt + \sigma_t dW_t \tag{A.6}$$

$$dY_t = \mu_t Y_t dt + \gamma_t dW_t. \tag{A.7}$$

Notons  $F$  le processus défini par

$$F(t, x) \stackrel{def}{=} f(t, x, Y_t).$$

Par une simple application du lemme d'Itô, il est facile de voir que ce processus satisfait

$$\begin{aligned} dF(t, x) &= (f_t(t, x, Y_t) + f_y(t, x, Y_t)\mu_t + \frac{f_{yy}(t, x, Y_t)}{2} \|\gamma_t\|^2)dt \\ &+ f_y(t, x, Y_t)\gamma_t dW_t. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Notons  $\beta$  et  $\Gamma$  les paramètres suivants

$$\begin{cases} \beta(t, x) = f_t(t, x, Y_t) + f_y(t, x, Y_t)\mu_t + \frac{f_{yy}(t, x, Y_t)}{2} \|\gamma_t\|^2 \\ \Gamma(t, x) = f_y(t, x, Y_t)\gamma_t. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

En appliquant ce dernier théorème, nous pouvons alors écrire que

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \beta(t, X_t)dt + \Gamma(t, X_t)dW_t + \langle \Gamma_x(t, X_t), \sigma_t \rangle dt \\ &+ F_x(t, X_t)dX_t + \frac{F_{xx}(t, X_t)}{2} \|\sigma_t\|^2 dt. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pour vérifier ce résultat, il suffit de remarquer que

$$\Gamma_x(t, X_t) = f_{xy}(t, X_t, Y_t)\gamma_t$$

$$\langle \Gamma_x(t, X_t), \sigma_t \rangle = f_{xy}(t, X_t, Y_t) \langle \gamma_t, \sigma_t \rangle = f_{xy}(t, X_t, Y_t) \langle X, Y \rangle_t$$

$$F_x(t, X_t) = f_x(t, X_t, Y_t)$$

$$F_{xx}(t, X_t) = f_{xx}(t, X_t, Y_t)$$

et déduire que la dynamique de  $F(t, X_t)$  est celle de  $f(t, X_t, Y_t)$  obtenue par une simple application du lemme d'Itô à deux variables.

**Théorème A.12.** (i) Soit  $F(t, x)$  une  $\mathcal{C}^{m, \delta}$ -semimartingale continue telle que ses caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ ,  $\delta > 0$ . Soit  $X(t, x)$ ,  $x \in \Lambda$ ,  $t \in [0, T]$  un processus prévisible continue à valeurs dans  $\mathcal{C}^{k, \gamma}(\Lambda, \mathcal{I})$ ,  $\gamma > 0$  et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^e$ . Posons

$$M(t, x) = \int_0^t F(X(s, x), ds). \quad (\text{A.11})$$

Alors  $M(t, x)$  admet une semimartingale continue à valeurs dans  $\mathcal{C}^{m \wedge k, \varepsilon}(\Lambda, \mathbb{R})$  et dont les caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}^{m \wedge k, \gamma \delta}$  avec  $\varepsilon < \gamma \delta$ . Si de plus  $g_t$  est un processus continu prévisible à valeurs dans  $\Lambda$ , alors on a l'égalité suivante

$$\int_0^t M(ds, g_s) = \int_0^t F(X(s, g_s), ds) \quad (\text{A.12})$$

(ii) Si  $m \geq 1$  et  $k \geq 1$ , la dérivée de l'intégrale stochastique (A.11) est égale à l'intégrale de la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial x^i} M(t, x) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^j} X^i(s, x) \frac{\partial}{\partial x^i} F(X(s, x), ds). \quad (\text{A.13})$$

(iii) Soit  $F(t, x, \lambda)$ ,  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  une  $\mathcal{C}^{m, \delta}(\mathcal{I} \times \Lambda : \mathbb{R})$ -semimartingale continue dont les caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ . Si  $g_t$  est un processus continu prévisible à valeurs dans  $\Lambda$ , le processus  $M$  défini par

$$M(t, \lambda) = \int_0^t F(ds, g_s, \lambda) \quad (\text{A.14})$$

admet une modification continue à valeurs dans  $\mathcal{C}^{m, \varepsilon}(\Lambda : \mathbb{R})$ ,  $\varepsilon < \delta$ , dont les caractéristiques locales sont dans  $\mathcal{B}^{m, \delta}$ . Si de plus  $l_t$  est un processus prévisible continue à valeurs dans  $\Lambda$ , alors nous avons l'égalité suivante

$$\int_0^t M(ds, l_s) = \int_0^t F(ds, g_s, l_s). \quad (\text{A.15})$$

## A.5 Équations différentielles stochastiques

Dans ce paragraphe, nous considérons les équations différentielles stochastiques multidimensionnelles du type d'Itô

$$dX_t = dF(t, X_t). \quad (\text{A.16})$$

Notons dans toute la suite,  $(\beta, \Gamma) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  le drift et la volatilité de la semimartingale  $F(t, x) = (F^1(t, x), \dots, F^n(t, x))$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , supposée continue à valeurs dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n)$ .

Notons  $\Gamma(t, x, y) = (\Gamma^{i,j}(t, x, y) = \langle \Gamma^i(t, x), \Gamma^j(t, y) \rangle)_{i,j=1..n}$  alors  $\Gamma(t, x, y)$  est une matrice  $n \times n$  dont les principales propriétés sont les suivantes :

- (a) La matrice  $\Gamma(t, x, y)$  est *symétrique* par définition,  $\Gamma^{i,j}(t, x, y) = \Gamma^{j,i}(t, x, y)$  presque partout.
- (b) La matrice  $\Gamma(t, x, y)$  est *définie positive*,  $\sum_{i,j,p,q} \Gamma^{j,i}(t, x^p, y^q) z^p z^q \geq 0$  pour tout  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le couple  $(\beta(t, x), \Gamma(t, x, y))$  est appelé les caractéristiques locales de la semimartingale  $F$ .  $(\beta(t, x), \Gamma(t, x, y))$  est dit dans la classe  $(\mathcal{B}^{m,\delta}, \mathcal{B}^{m',\delta'})$ , si pour tout  $i = 1..n$  les caractéristiques locales de  $F^i$  sont dans la classe  $(\mathcal{B}^{m,\delta}, \mathcal{B}^{m',\delta'})$ . Dans le cas où  $m = m'$ ,  $\delta = \delta'$ ,  $(\beta(t, x), \Gamma(t, x, y))$  est simplement dit dans la classe  $\mathcal{B}^{m,\delta}$ .

Dans la suite si  $F$  est une  $\mathcal{C}$ -semimartingale dont les caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}^{0,\delta}$  alors l'intégrale stochastique  $F(t, X_t)$  est bien définie pour tout processus prévisible  $X$  continue à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition A.11.** Soient  $t_0 \in [0, T]$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Un processus  $X_t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $\mathcal{F}_t$ -adapté est une solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô définie à partir de  $F$  partant de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à l'instant  $t_0$  si elle vérifie

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t dF(s, X_s). \quad (\text{A.17})$$

Nous dirons aussi que  $X_t$  est gouverné par l'équation différentielle stochastique d'Itô induite par  $F$ .

**Théorème A.13.** Soit  $F(t, x)$  une semimartingale continue à valeurs dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  dont les caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}_b^{0,1}$ . Alors pour tous  $t_0$  et  $x_0$  l'équation (A.17) admet une unique solution.

D'après ce premier résultat, si les caractéristiques locales du processus  $F$  sont uniformément lipshitziennes alors (A.17) admet une unique solution. Nous noterons en particulier que sous cette hypothèse la solution est non-explosive, elle par conséquent bien définie sur tout l'intervalle  $[t_0, T]$ . Comme dans le cadre des équations différentielles ordinaires, si cette hypothèse n'est pas satisfaite, cette EDS peut ne pas avoir une solution globale, car cette solution, si elle existe, peut être explosive en un temps fini, cependant nous pouvons définir des solutions locales de (A.17),

**Définition A.12.** Soit  $X_t$ ,  $t \in [t_0, \tau_\infty]$  un processus localement continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}_t$ -adapté.  $X$  est une solution locale de (A.17) si

$$X_{t \wedge \tau_N} = x_0 + \int_{t_0}^{t \wedge \tau_N} dF(s, X_s) \quad (\text{A.18})$$

est satisfaite pour tout  $N$  où  $(\tau_N)$  est une séquence de temps d'arrêt :  $\tau_N < \tau_\infty$ ,  $\tau_N \uparrow \tau_\infty$ .

Si  $\lim_{t \wedge \tau_N} X_t = \infty$  avec  $\tau_\infty < T$ ,  $X_t$  est appelée solution maximale et  $\tau_\infty$  est dit le temps d'explosion. Dans le cas où le temps d'explosion est égal à  $T$  p.s.,  $X_t$  est alors une solution globale.

Sans faire l'hypothèse que les caractéristiques locales de  $F$  sont uniformément lipschitziennes, nous montrons toutefois que cette EDS admet une unique solution maximale.

**Théorème A.14.** Soit  $F(t, x)$  une semimartingale continue à valeurs dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n)$  dont les caractéristiques locales sont dans la classe  $\mathcal{B}^{0,1}$ . Alors, pour tous  $t_0$  et  $x_0$ , l'équation (A.17) admet une unique solution maximale.

Si de plus nous supposons qu'il existe un processus prévisible  $K_t$  positif vérifiant  $\int_0^T K_t dt < +\infty$  et tel que les inégalités suivantes sont satisfaites

$$||\Gamma(t, x, x)|| \leq K_t(1 + |x|)^2 \quad (\text{A.19})$$

$$|\beta(t, x)| \leq K_t(1 + |x|), \quad (\text{A.20})$$

nous pouvons montrer l'existence et l'unicité d'une solution, cette fois-ci, globale de (A.17).

**Théorème A.15.** Supposons que les caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  de la  $\mathcal{C}$ -semimartingale continue  $F$  sont dans la classe  $\mathcal{B}^{0,1}$  et vérifient (A.19) et (A.20), alors pour tous  $t_0$  et  $x_0$ , l'équation (A.17) admet une unique solution globale. Si de plus

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \int_0^T K_s ds}] < +\infty, \quad \forall \lambda > 0,$$

cette solution globale admet des moments finis pour tout ordre.

## A.6 Flots stochastiques

Pour commencer nous donnons la définition d'un homéomorphisme et d'un difféomorphisme flot stochastique dans un espace euclidien. Soit  $X_{s,t}(x, w)$ ,  $s, t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  un processus défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  tel que pour tout  $w \in \Omega$ ,  $X_{s,t}(\cdot, w)$  est continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $s, t$ .  $X$  est dit un homéomorphisme flot stochastique s'il existe un ensemble négligeable  $N$  de  $\Omega$  tel que pour tout  $w \in N^c$  la famille d'applications continues  $\{X_{s,t}(w) : s, t \in [0, T]\}$  définit un champ d'homéomorphismes, c-à-d. elle satisfait les propriétés suivantes :

- (i) l'égalité  $X_{s,t}(w) = X_{s,u}(w) \circ X_{u,t}(w)$  est vraie pour tout  $t, s$  et  $u$ ,  $\circ$  désigne l'opérateur composé.
- (ii)  $X_{s,s}(w)$  est l'identité pour tout  $s$ .
- (iii) l'application  $X_{s,t}(w) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme pour tout  $s, t$ .  
Si de plus  $X_{s,t}(w)$  vérifie :
- (iv)  $X_{s,t}(w)$  est  $k$ -fois différentiable en  $x$  pour tout  $s, t$  et tel que toutes les dérivées sont continues par rapport au triplet  $(s, t, x)$ , alors  $X_{s,t}(w)$  est appelé un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme flot stochastique.

Si  $X_{s,t}(w)^{-1}$  est l'inverse de  $X_{s,t}(w)$  par rapport à  $x$  alors d'après (i) et (ii),  $X_{s,t}(w)^{-1} = X_{t,s}(w)^{-1}$ . Par conséquent l'assertion (iii) est aussi satisfaite ce qui implique qu' à son tour  $X_{s,t}(w)^{-1}$  est un homéomorphisme flot stochastique. Si de plus  $X_{s,t}(w)$  est  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme pour tous  $s$  et  $t$ , la condition (iv) implique que  $X_{s,t}(w)^{-1}$  est  $k$ -fois continûment différentiable par rapport à  $x$ .  $X_{s,t}(w)^{-1}$  est alors un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme flot stochastique si la condition (iv) est satisfaite. Enfin pour simplifier les notations, nous confondrons  $X_{s,t}(w)^{-1}$  et  $X_{t,s}(w)$ .

Dans la suite nous donnerons quelques conditions nécessaires sous lesquelles l'équation aux dérivées partielles (A.17), admet comme solution un flot stochastique. En d'autres termes la question est de savoir sous quelles conditions la solution, si elle existe, de l'EDS

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t dF(s, X_s) \quad (\text{A.21})$$

est un homéomorphisme ou encore un difféomorphisme de  $x$ .

**Théorème A.16.** *Supposons que les caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  de la  $\mathcal{C}$ -semimartingale continue  $F$  sont dans la classe  $\mathcal{B}_b^{0,1}$ . Alors il existe une modification continue de la solution de l'équation (A.21) qui est un homéomorphisme flot stochastique. Ou encore  $\forall t \geq 0$   $X_t$  est une  $\mathcal{C}^{0,\gamma}$ -semimartingale pour tout  $\gamma < 1$ .*

**Théorème A.17.** *Supposons que les caractéristiques locales  $(\beta, \Gamma)$  de la  $\mathcal{C}$ -semimartingale continue  $F$  sont dans la classe  $\mathcal{B}_b^{k,\delta}$  où  $k \geq 1$  et  $\delta > 0$ . Alors la solution de l'équation différentielle stochastique gouvernée par  $F$  admet une modification continue qui est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme flot stochastique.  $\forall t \geq 0$   $X_t$  est une  $\mathcal{C}^{k,\gamma}$ -semimartingale pour tout  $\gamma < \delta$ .*

Nous notons enfin que l'existence et l'unicité de la solution dans ces deux derniers théorèmes sont assurés par le résultat (A.13) du paragraphe précédent.





## Annexe B

### Projection sur un cône convexe

Dans cet appendice, nous rappelons la notion d'un cône convexe d'un espace de Hilbert, nous donnerons les principales propriétés ainsi que la définition de la projection sur un cône convexe. Nous établirons aussi quelques résultats nécessaires pour notre étude.

**Définition B.13.** *Un ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est un cône s'il est stable par addition et multiplication par un réel positif. Si de plus  $C$  est fermé,  $0 \in C$ .*

**Définition B.14.** *Soit  $C$  un cône convexe, on appelle cône dual de  $C$  et on note  $C^*$ , l'ensemble défini par*

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu \in \mathbb{R}^d : \langle \pi, \nu \rangle \geq 0, \forall \pi \in C\}. \quad (\text{B.1})$$

**Lemme B.5.** *Soient  $C$  un cône convexe fermé dans un espace de Hilbert  $X$ ,  $\Pi_C$  l'opérateur de projection de  $X$  dans  $C$ , et soient  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Alors :*

(a) *Pour tout  $x \in X$ , il existe un unique  $x_1 = \Pi_C(x) \in C$  et un unique  $x_2 \in (C)^*$  tels que  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ .*

(a1)  *$\Pi_C(x)$  minimise la distance entre  $x$  et l'ensemble  $C$ , c-à-d.*

$$\|x - \Pi_C x\| = \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

(a2)  *$(\Pi_C)^2 = \Pi_C$  : l'opérateur de projection est idempotent.*

(a3)  *$\Pi_C(\alpha x) = \alpha \Pi_C x$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ ,  $\Pi_C$  est positivement homogène.*

(b1)  $\Pi_C(x + y) = \Pi_C x + \Pi_C y$  si et seulement si

$$\langle \prod_C x, y \rangle = \langle \prod_C x, \prod_C y \rangle = \langle x, p(y) \rangle .$$

Ceci implique que l'opérateur de projection sur un cône convexe est en général non-linéaire.

(b2)  $\langle x - \Pi_C(x), \Pi_C(y) \rangle \leq 0$ .

(b3)  $\langle x - \Pi_C(x), \Pi_C(x) \rangle = 0$ .

(c1)  $\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\| \leq \|x - y\|$ .

(c2)  $I - \Pi_C$  est l'opérateur de projection sur  $(C)^*$ .

(c3)  $(C)^* = (\Pi_C)^{-1}\{0\}$ ,  $\text{Ker}(\Pi_C) = C^*$ .

Les résultats de ce lemme sont valables pour tout cône convexe  $C$  d'un espace de Hilbert. En particulier pour l'ensemble  $\mathcal{K}\sigma$  (Comme  $\mathcal{K}$  est un cône convexe et par linéarité de  $\sigma$ , il est facile de montrer que  $\mathcal{K}\sigma$  est à son tour un cône convexe). Pour les détails de la démonstration de ce lemme, nous renvoyons le lecteur à la référence suivante [46].

**Lemme B.6.** Soit  $a(t, x)_{t \geq 0}$  un processus à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ . Si pour tout  $t \geq 0$  les applications  $x \mapsto a(t, x)$  et  $x \mapsto a^\mathcal{K} = \prod_{\mathcal{K}\sigma} a$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

(1) Si  $\mathcal{K}$  est un sous espace linéaire de  $\mathbb{R}^d$  indépendant de  $x$ , alors les opérateurs de projection et de dérivation commutent :  $a'^{\mathcal{K}} = a^{\mathcal{K},'}$ ,  $a^{\mathcal{K},'} = \prod_{\mathcal{K}\sigma}(a')$

(2) Sinon et de manière générale, le processus  $(a^\mathcal{K})' - a'$  est orthogonal à  $a'$ , c'est à dire

$$\langle a^\mathcal{K}, (a^\mathcal{K})' - a' \rangle \equiv 0 \quad (\text{B.2})$$

*Démonstration.* (1) Dans le cadre particulier où  $\mathcal{K}$  est un sous espace linéaire de  $\mathbb{R}^d$  l'opérateur de projection est alors linéaire. Or par définition nous avons que

$$(a^\mathcal{K})'(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^\mathcal{K})(t, x + h) - (a^\mathcal{K})(t, x)}{h}.$$

Comme  $\mathcal{K}$  est indépendant de  $x$ ,

$$\begin{aligned} (a^\mathcal{K})'(t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a(t, x+h))^\mathcal{K} - (a(t, x))^\mathcal{K}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{a(t, x+h) - a(t, x)}{h} \right)^\mathcal{K} \\ &= (a')^\mathcal{K}. \end{aligned}$$

(2) La preuve de cette assertion est basée sur le théorème de l'enveloppe, en effet par définition du projeté nous avons

$$\begin{cases} \|a - \prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a\|^2 = \min_{b \in \mathcal{K}(x)\sigma} \|a - b\|^2 \\ \prod_{\mathcal{K}\sigma} = \arg \min_{b \in \mathcal{K}(x)\sigma} \|a - b\|^2. \end{cases}$$

Notons maintenant par

$$\begin{cases} V(x) = \|a(x) - \prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x)\|^2 \\ f(b, x) = \|a - b\|^2. \end{cases}$$

Alors par définition nous avons  $(\frac{\partial}{\partial f})(\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x), x) = 0$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} V(x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x), x) \\ &= \frac{\partial}{\partial b} f|_{\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x)} \frac{\partial}{\partial x} (\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a)(x) + (\frac{\partial}{\partial x} f)(b, x)|_{b=\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x)} \\ &= (\frac{\partial}{\partial x} f)(b, x)|_{b=\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x)}. \end{aligned}$$

Par la suite, par une dérivation formelle par rapport à  $x$ ,

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2 \langle a - \prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a, a' - (\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a)' \rangle \\ &= (\frac{\partial}{\partial x} f)(\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a(x), x) = 2 \langle a - \prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a, a' \rangle (x) \end{aligned}$$

d'où

$$\langle a - \prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a, (\prod_{\mathcal{K}(x)\sigma} a)' \rangle = 0$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Dans la suite nous posons le problème suivant : soit  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  quelconque, et considérons le nouvel ensemble  $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} + \alpha$ . Il est clair qu'ainsi défini  $\hat{\mathcal{K}}$  est un ensemble fermé convexe. Par contre la somme de deux éléments de  $\hat{\mathcal{K}}$  n'est pas forcément un élément de  $\hat{\mathcal{K}}$ . De plus il n'est pas stable par multiplication par un réel positif ce qui implique que  $\hat{\mathcal{K}}$  ne peut être de manière générale un cône. Les questions sont alors les suivantes :

1. Vu la forme très particulière de  $\hat{\mathcal{K}}$  comme une translation du cône convexe fermé  $\mathcal{K}$  par le vecteur  $\alpha$ , pouvons-nous définir l'équivalent d'une projection sur cet ensemble ? avons-nous unicité de la projection ?
2. Si la projection existe est unique et notée  $\prod_{\hat{\mathcal{K}}}$ , avons-nous l'identité  $\langle a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a), \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a) \rangle = 0$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$  ?

Pour répondre à la première question, nous montrons le résultat suivant :

**Lemme B.7.** *Pour tout point  $a$  de  $\mathbb{R}^d$ , il existe un unique point de  $\hat{\mathcal{K}}$  noté  $\prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a)$  tel que*

$$\|a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a)\| = \inf_{b \in \hat{\mathcal{K}}} \|a - b\|. \quad (\text{B.3})$$

De plus ce point vérifie

$$\prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a) = \prod_{\mathcal{K}}(a + x\sigma^0\sigma^{-1}) - x\sigma^0\sigma^{-1}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{B.4})$$

Si  $\mathcal{K}$  est un sous espace linéaire de  $\mathbb{R}^d$  alors l'opérateur de projection est linéaire, (B.5) devient

$$\prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a) = \prod_{\mathcal{K}}(a) - (x\sigma^0 - \prod_{\mathcal{K}}(x\sigma^0)), \quad \forall a \in \mathbb{R}^d \quad (\text{B.5})$$

et si en plus le vecteur  $\sigma^0$  est dans  $\mathcal{K}$  alors ces deux opérateurs sont identiques.

*Démonstration.* Par définition de la projection, sur un cône convexe fermé d'un vecteur  $a \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \|a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}_\sigma}(a)\| &= \min_{b \in \hat{\mathcal{K}}_\sigma} \|a - b\| = \min_{c \in \mathcal{K}_\sigma} \|a + x\sigma^0\sigma^{-1} - c\| \\ &= \|a + x\sigma^0 - \prod_{\mathcal{K}_\sigma}(a + x\sigma^0)\|. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Par unicité du projeté, nous déduisons que

$$\prod_{\hat{\mathcal{K}}_\sigma}(a) = \prod_{\mathcal{K}_\sigma}(a + x\sigma^0) - x\sigma^0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{B.7})$$

□

L'opérateur de projection sur l'ensemble  $\hat{\mathcal{K}}$  étant bien défini, nous pouvons alors répondre à la deuxième question ci-dessus.

**Lemme B.8.** *Pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ , l'identité suivante est satisfaite*

$$\langle a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a), \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a) \rangle = 0. \quad (\text{B.8})$$

*Démonstration.* Toujours par définition nous avons la caractérisation suivante,

$$\|a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}_\sigma}(a)\| = \min_{b \in \hat{\mathcal{K}}_\sigma} \|a - b\|. \quad (\text{B.9})$$

Soit  $a \in \mathbb{R}^d$  fixé et notons  $f(b)$  la fonction  $b \in \hat{\mathcal{K}} \mapsto f(b) = \|a - b\|$ , comme  $\mathcal{K}$  est convexe fermé,  $f$  est une fonction continue convexe et atteint son minimum au point  $\prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a)$ , il en suit que sa dérivée en ce point est nulle, c-à-d.,

$$\langle a - \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a), \prod_{\hat{\mathcal{K}}}(a) \rangle = 0 \quad (\text{B.10})$$

ce qui prouve le résultat. □



# Bibliographie

- [1] M. Allais, *Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque*, Econométrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, no. 40, Paris, vol. 1952, Centre de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, pp. 127–140.
- [2] ———, *Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine*, Econométrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, no. 40, Paris, vol. 1952, Centre de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, pp. 257–332.
- [3] ———, *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine*, *Econometrica* **21** (1953), 503–546.
- [4] ———, *Observations générales*, Econométrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, no. 40, Paris, vol. 1952, Centre de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, pp. 245–247.
- [5] Philippe Artzner, *On the numeraire portfolio*, Mathematics of derivative securities (Cambridge, 1995), Publ. Newton Inst., vol. 15, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 53–58.
- [6] Louis Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995, Théorie mathématique du jeu. [Mathematical theory of games], Reprint of the 1900 original.
- [7] V. Bally and A. Matoussi, *Weak solutions for SPDEs and backward doubly*



- stochastic differential equations*, J. Theoret. Probab. **14** (2001), no. 1, 125–164.
- [8] Dirk Becherer, *The numeraire portfolio for unbounded semimartingales*, Finance Stoch. **5** (2001), no. 3, 327–341.
- [9] D. Bernoulli, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (5, 175-192, 1738), Econometrica **22** (1954), 23–36, Translated by L. Sommer.
- [10] Jean-Michel Bismut, *Duality methods in the control of densities*, SIAM J. Control Optim. **16** (1978), no. 5, 771–777.
- [11] John C. Cox and Chi-fu Huang, *A variational problem arising in financial economics*, J. Math. Econom. **20** (1991), no. 5, 465–487.
- [12] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, ArXiv Mathematics e-prints (1992).
- [13] Jakša Cvitanić and Ioannis Karatzas, *Convex duality in constrained portfolio optimization*, Ann. Appl. Probab. **2** (1992), no. 4, 767–818.
- [14] ———, *Hedging contingent claims with constrained portfolios*, Ann. Appl. Probab. **3** (1993), no. 3, 652–681.
- [15] Gerard Debreu, *Topological methods in cardinal utility theory*, Mathematical methods in the social sciences 1959, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1960, pp. 16–26.
- [16] ———, *Mathematical economics*, Econometric Society Monographs in Pure Theory, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, Twenty papers of Debreu, With an introduction by Werner Hildenbrand, Including papers coauthored by Kenneth J. Arrow and Herbert Scarf.
- [17] F. Delbaen and W. Schachermayer, *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*, Math. Ann. **312** (1998), no. 2, 215–250.
- [18] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer, *The no-arbitrage property under a change of numéraire*, Stochastics Stochastics Rep. **53** (1995), no. 3-4, 213–226.

- 
- [19] Darrell Duffie, Wendell Fleming, H. Mete Soner, and Thaleia Zariphopoulou, *Hedging in incomplete markets with HARA utility*, J. Econom. Dynam. Control **21** (1997), no. 4-5.
  - [20] N. El Karoui, *Les aspects probabilistes du contrôle stochastique*, Ninth Saint Flour Probability Summer School—1979 (Saint Flour, 1979), Lecture Notes in Math., vol. 876, Springer, Berlin, 1981, pp. 73–238.
  - [21] N. El Karoui and S.-J. Huang, *A general result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations*, Backward stochastic differential equations (Paris, 1995–1996), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 364, Longman, Harlow, 1997, pp. 27–36.
  - [22] N. El Karoui, E. Pardoux, and M. C. Quenez, *Reflected backward SDEs and American options*, Numerical methods in finance, Publ. Newton Inst., vol. 13, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 215–231.
  - [23] Nicole El Karoui, Monique Jeanblanc, and Vincent Lacoste, *Optimal portfolio management with American capital guarantee*, J. Econom. Dynam. Control **29** (2005), no. 3, 449–468.
  - [24] Nicole El Karoui and P. A. Meyer, *Les changements de temps en théorie générale des processus*, Séminaire de Probabilités, XI (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1975/1976), Springer, Berlin, 1977, pp. 65–78. Lecture Notes in Math., Vol. 581.
  - [25] Nicole El Karoui and Gérard Weidenfeld, *Théorie générale et changement de temps*, Séminaire de Probabilités, XI (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1975/1976), Springer, Berlin, 1977, pp. 79–108. Lecture Notes in Math., Vol. 581.
  - [26] Robert J. Elliott and Hans Föllmer, *Orthogonal martingale representation*, Stochastic analysis, Academic Press, Boston, MA, 1991, pp. 139–152.
  - [27] Shizan Fang, *Recent developments in stochastic differential equations*, Stochastic analysis and partial differential equations, Contemp. Math., vol. 429, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 111–119.
  - [28] Shizan Fang, Peter Imkeller, and Tusheng Zhang, *Global flows for stochastic differential equations without global Lipschitz conditions*, Ann. Probab. **35** (2007), no. 1, 180–205.

- [29] Shizan Fang and Dejun Luo, *Flow of homeomorphisms and stochastic transport equations*, Stoch. Anal. Appl. **25** (2007), no. 5, 1079–1108.
- [30] Peter C. Fishburn, *Utility theory for decision making*, Publications in Operations Research, No. 18, John Wiley & Sons Inc., New York, 1970.
- [31] ———, *Utility and subjective probability*, Handbook of game theory with economic applications, Vol. II, Handbooks in Econom., vol. 11, North-Holland, Amsterdam, 1994, pp. 1397–1435.
- [32] Peter C. Fishburn and Irving H. Lavalley, *Subset preferences in linear and nonlinear utility theory*, J. Math. Psych. **37** (1993), no. 4, 611–623.
- [33] Hans Föllmer, *Probabilistic aspects of financial risk*, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 21–36.
- [34] Hans Föllmer and Alexander Schied, *Stochastic finance*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 27, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002, An introduction in discrete time.
- [35] Hans Föllmer and Martin Schweizer, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied stochastic analysis (London, 1989), Stochastics Monogr., vol. 5, Gordon and Breach, New York, 1991, pp. 389–414.
- [36] M.R. Tehranchi F.P.Y.S. Berrier, L.C.G. Rogers, *A characterization of forward utility functions*.
- [37] Hélyette Geman, Nicole El Karoui, and Jean-Charles Rochet, *Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing*, J. Appl. Probab. **32** (1995), no. 2, 443–458.
- [38] Itzhak Gilboa and David Schmeidler, *Maxmin expected utility with nonunique prior*, J. Math. Econom. **18** (1989), no. 2, 141–153.
- [39] Bruno Girotto and Fulvio Ortù, *Numeraires, equivalent martingale measures and completeness in finite-dimensional securities markets*, J. Math. Econom. **27** (1997), no. 3, 283–294.
- [40] J. Michael Harrison and Stanley R. , *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Process. Appl. **11** (1981), no. 3, 215–260.

- 
- [41] J. Michael Harrison and David M. Kreps, *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, J. Econom. Theory **20** (1979), no. 3, 381–408.
  - [42] Hua He and Neil D. Pearson, *Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints : the infinite-dimensional case*, J. Econom. Theory **54** (1991), no. 2, 259–304.
  - [43] Vicky Henderson and David Hobson, *Horizon-unbiased utility functions*, Stochastic Process. Appl. **117** (2007), no. 11, 1621–1641.
  - [44] Julien Hugonnier and Dmitry Kramkov, *Optimal investment with random endowments in incomplete markets*, Annals of applied probability **14** (2004), 845.
  - [45] Julien Hugonnier, Dmitry Kramkov, and Walter Schachermayer, *On utility-based pricing of contingent claims in incomplete markets*, Mathematical Finance **15** (2005), no. 2, 203–212.
  - [46] John M. Ingram and M. M. Marsh, *Projections onto convex cones in hilbert space*, J. Approx. Theory **64** (1991), no. 3, 343–350.
  - [47] Karatzas Ioannis and Wang Hui, *Utility maximization with discretionary stopping*, SIAM J. Control Optim. **39** (2000), no. 1, 306–329.
  - [48] Takashi Kamihigashi, *Stochastic optimal growth with bounded or unbounded utility and with bounded or unbounded shocks*, J. Math. Econom. **43** (2007), no. 3-4, 477–500.
  - [49] I. Karatzas, J. Lehoczky, S. Sethi, and S. Shreve, *Explicit solution of a consumption/investment problem*, Stochastic optimization (Kiev, 1984), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 81, Springer, Berlin, 1986, pp. 59–69.
  - [50] Ioannis Karatzas, *Certain convexity questions in stochastic optimization*, Systems Control Lett. **1** (1981/82), no. 2, 105–107.
  - [51] Ioannis Karatzas and Constantinos Kardaras, *The numéraire portfolio in semimartingale financial models*, Finance Stoch. **11** (2007), no. 4, 447–493.
  - [52] ———, *The numeraire portfolio in semimartingale financial models*, Finance and Stochastics **11** (2007), no. 4, 447–493.

- [53] Ioannis Karatzas, John P. Lehoczky, and Steven E. Shreve, *Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon*, SIAM J. Control Optim. **25** (1987), no. 6, 1557–1586.
- [54] Ioannis Karatzas, John P. Lehoczky, Steven E. Shreve, and Gan-Lin Xu, *Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), no. 3, 702–730.
- [55] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Methods of mathematical finance*, Springer, September 2001.
- [56] Ioannis Karatzas and Gordan Zitkovic, *Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets*, Annals of probability **31** (2003), 1821.
- [57] Edi Karni and David Schmeidler, *Utility theory with uncertainty*, Handbook of mathematical economics, Vol. IV, Handbooks in Econom., vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 1763–1831.
- [58] J. Komlós, *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 217–229.
- [59] Ralf Korn, Frank Oertel, and Manfred Schäl, *The numeraire portfolio in financial markets modeled by a multi-dimensional jump diffusion process*, Decis. Econ. Finance **26** (2003), no. 2, 153–166.
- [60] D. Kramkov and W. Schachermayer, *The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets*, Annals of Applied Probability **9** (1999), 904–950.
- [61] D. Kramkov and W. Schachermayer, *Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets*, Ann. Appl. Probab. **13** (2003), no. 4, 1504–1516.
- [62] D. Kramkov and M. Sîrbu, *Asymptotic analysis of utility-based hedging strategies for small number of contingent claims*, Stochastic Processes and their Applications **117** (2007), no. 11, 1606 – 1620.
- [63] D. O. Kramkov, *Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets*, Probab. Theory Related Fields **105** (1996), no. 4, 459–479.

- 
- [64] Dmitry Kramkov and Mihai Sîrbu, *On the two-times differentiability of the value functions in the problem of optimal investment in incomplete markets*, Annals of applied probability **16** (2006), 1352.
  - [65] ———, *Sensitivity analysis of utility-based prices and risk-tolerance wealth processes*, Annals of applied probability **16** (2006), 2140.
  - [66] H. Kunita, *Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*, École d'été de probabilités de Saint-Flour, XII—1982, Lecture Notes in Math., vol. 1097, Springer, Berlin, 1984, pp. 143–303.
  - [67] ———, *Generalized solutions of a stochastic partial differential equation*, J. Theoret. Probab. **7** (1994), no. 2, 279–308.
  - [68] Hiroshi Kunita, *Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert space*, Nagoya Math. J. **38** (1970), 41–52.
  - [69] ———, *On the representation of solutions of stochastic differential equations*, Seminar on Probability, XIV (Paris, 1978/1979) (French), Lecture Notes in Math., vol. 784, Springer, Berlin, 1980, pp. 282–304.
  - [70] ———, *On the decomposition of solutions of stochastic differential equations*, Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 851, Springer, Berlin, 1981, pp. 213–255.
  - [71] ———, *Stochastic differential equations and stochastic flows of homeomorphisms*, Stochastic analysis and applications, Adv. Probab. Related Topics, vol. 7, Dekker, New York, 1984, pp. 269–291.
  - [72] ———, *Stochastic flows and stochastic partial differential equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 1021–1031.
  - [73] ———, *A limit theorem for stochastic partial differential equations*, Probability theory and mathematical statistics (Kyoto, 1986), Lecture Notes in Math., vol. 1299, Springer, Berlin, 1988, pp. 228–238.
  - [74] Hiroshi Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridges studies advanced mathematics, 1997.
  - [75] Cuong Le Van and H. Cagri Saglam, *Optimal growth models and the Lagrange multiplier*, J. Math. Econom. **40** (2004), no. 3-4, 393–410.

- [76] Cuong Le Van and Yiannis Vailakis, *Recursive utility and optimal growth with bounded or unbounded returns*, J. Econom. Theory **123** (2005), no. 2, 187–209.
- [77] Zongxia Liang, *Stochastic differential equations driven by spatial parameters semimartingale with non-lipschitz local characteristic*, Potential Analysis **26** (2007).
- [78] Anis Matoussi and Michael Scheutzow, *Stochastic PDEs driven by non-linear noise and backward doubly SDEs*, J. Theoret. Probab. **15** (2002), no. 1, 1–39.
- [79] Anis Matoussi and Mingyu Xu, *Sobolev solution for semilinear PDE with obstacle under monotonicity condition*, Electron. J. Probab. **13** (2008), no. 35, 1035–1067.
- [80] R. C. Merton, *Continuous-time finance*, Cambridge : Blackwell, 1990.
- [81] Robert C. Merton, *Lifetime portfolio selection under uncertainty : The continuous-time case*, The Review of Economics and Statistics **51** (1969), no. 3, 247–257.
- [82] ———, *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, J. Econom. Theory **3** (1971), no. 4, 373–413.
- [83] Robert C. Merton and Marti G. Subrahmanyam, *The optimality of a competitive stock market*, Bell J. Econom. and Management Sci. **5** (1974), no. 1, 145–170, Symposium on the optimality of competitive capital markets.
- [84] M. Musiela and T. Zariphopoulou, *Backward and forward utilities and the associated pricing systems : The case study of the binomial model*, Preprint (2003).
- [85] ———, *The single period binomial model (r. carmona, ed.)*, Princeton University Press (2005).
- [86] ———, *Stochastic partial differential equations in portfolio choice*, Preliminary report (2007).
- [87] M. Musiela and T. Zariphopoulou, *Portfolio choice under dynamic investment performance criteria*, Quantitative Finance **9** (2008), no. 2, 161–170.

- 
- [88] ———, *Portfolio choice under space-time monotone performance criteria*, Preprint (November-2008).
  - [89] Marek Musiela and Thaleia Zariphopoulou, *An example of indifference prices under exponential preferences*, Finance Stoch. **8** (2004), no. 2, 229–239.
  - [90] ———, *Indifference prices of early exercise claims*, Mathematics of finance, Contemp. Math., vol. 351, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 259–271.
  - [91] Marek Musiela and Thaleia Zariphopoulou, *A valuation algorithm for indifference prices in incomplete markets*, Finance and Stochastics **8** (2004), no. 3, 399–414.
  - [92] Marek Musiela and Thaleia Zariphopoulou, *Investment and valuation under backward and forward dynamic exponential utilities in a stochastic factor model*, Advances in mathematical finance, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2007, pp. 303–334.
  - [93] Daniel L. Ocone and Etienne Pardoux, *A generalized itô-ventzell formula. application to a class of anticipating stochastic differential equations.*, (1989) (English).
  - [94] Huyên Pham, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 61, Springer, Berlin, 2007.
  - [95] Eckhard Platen, *A benchmark approach to finance*, Math. Finance **16** (2006), no. 1, 131–151.
  - [96] Eckhard Platen and David Heath, *A benchmark approach to quantitative finance*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
  - [97] Stanley R. Pliska, *A stochastic calculus model of continuous trading : optimal portfolios*, Math. Oper. Res. **11** (1986), no. 2, 370–382.
  - [98] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
  - [99] Stephen A. Ross, *The arbitrage theory of capital asset pricing*, J. Econom. Theory **13** (1976), no. 3, 341–360.



- [100] Richard Rouge and Nicole El Karoui, *Pricing via utility maximization and entropy*, Math. Finance **10** (2000), no. 2, 259–276, INFORMS Applied Probability Conference (Ulm, 1999).
- [101] Paul A. Samuelson, *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming*, The Review of Economics and Statistics **51** (1969), no. 3, 239–246.
- [102] Leonard J. Savage, *The foundations of statistics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1954.
- [103] Walter Schachermayer, *Optimal investment in incomplete financial markets*, Mathematical Finance : Bachelier Congress 2000, Springer, 2001, pp. 427–462.
- [104] Helmut Strasser, *Mathematical theory of statistics*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 7, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985, Statistical experiments and asymptotic decision theory.
- [105] Amos Tversky and Daniel Kahneman, *The framing of decisions and the psychology of choice*, Science **211** (1981), no. 4481, 453–458.
- [106] ———, *Rational choice and the framing of decisions*, Multiple criteria decision making and risk analysis using microcomputers (Istanbul, 1987), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F Comput. Systems Sci., vol. 56, Springer, Berlin, 1989, pp. 81–126.
- [107] Amos Tversky and Peter Wakker, *Risk attitudes and decision weights*, Econometrica **63** (1995), no. 6, 1255–1280.
- [108] A.D. Ventzel, *On equations of the theory of conditional Markov processes*, Theory of Probability and its Applications **10** (1965), 357–361.
- [109] John von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [110] ———, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1947, 2d ed.
- [111] Zheng Hong Wei and Shu Guang Zhang, *Relationship between optimal growth portfolio and martingale measure*, Chinese J. Appl. Probab. Statist. **19** (2003), no. 1, 14–18.

- 
- [112] Jia-An Yan, *A numeraire-free and original probability based framework for financial markets*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 861–871.
  - [113] Thaleia Zariphopoulou and Gordan Žitković, *Maturity independent risk measures*, Preprint (2007).
  - [114] Xicheng Zhang, *Homeomorphic flows for multi-dimensional sdes with non-lipschitz coefficients*, Stochastic Processes and their Applications **115** (2005), no. 3, 435 – 448.
  - [115] Gordan Žitković, *A dual characterization of self-generation and log-affine forward performances*, Preprint (2008).



## Abstract

**Keywords:** Forward Dynamic Utilities, Preferences and Numerical Representation, Portfolio Optimisation in Incomplet Market, Duality approach to portfolio optimization problem's, cone constraint, equivalent martingal, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, second order fully non linear PDE's, viscosity solution, Asymptotic Elasticity, Forward Dynamic Utilities, Generalized Itô formula (Itô-Ventzell Formula), Stochastic Partial Differential equations, Stochastic Differential equations, Semimartingal with Spatial Parameters, stochastic flows

**Keywords:** Utilités progressives dynamiques, Représentation numérique des préférences d'un agent, Optimisation de portefeuilles dans un marché incomplet, approche des problèmes d'optimisation de portefeuilles par dualité, contraintes de portefeuilles de type cônes convexes, martingale et martingale locale équivalente, équations de Hamilton-Jacobi-Bellman , EDP stochastiques du second ordre complètement non linéaires, solutions de viscosités, Élasticité asymptotique, Formule d'Itô généralisée (lemme d'Itô-Ventzell), EDP, équations différentielles stochastiques, Semimartingale avec paramètres Spatials, Flots stochastiques

